La geometría del universo

LA GEOMETRÍA DEL UNIVERSO

y otros ensayos de filosofía natural

por

Roberto Torretti

U

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
CONSEJO DE PUBLICACIONES

A Mario Bunge

Sumario

Prólogo

Gracias al enorme progreso de la observación astronómica y a la invención, por Albert Einstein, de una teoría original y poderosa que ordena e ilumina sus datos, la física del siglo XX ha podido tomar al universo mismo como objeto de investigación y atribuirle una estructura global y una historia. Esa teoría —la Relatividad General— y la cosmología basada en ella son el tema principal de todos los capítulos de este libro. Los dos últimos se refieren también brevemente a la Mecánica Cuántica, la otra gran teoría física de sumo interés filosófico desarrollada en el primer tercio de este siglo.

Presento en ellos una versión nueva —corregida y coordinada— de nueve estudios sobre cuestiones históricas y filosóficas de la física actual que escribí entre 1977 y 1990. Al revisarlos para esta publicación conjunta, puse en castellano —tomándome más libertades de lo que es normal en una traducción— los que redacté en inglés (2, 3, 5, 6, 7 y 8), añadí un Vocabulario matemático y algunas figuras ilustrativas, expandí algunas notas, inserté aquí y allá referencias a pasajes afines y paralelos en otras partes del libro y eliminé repeticiones inútiles.

He uniformado las referencias bibliográficas, que se identifican en el texto y las notas por el nombre del autor y la fecha de publicación (salvo en el caso de algunas ediciones de obras clásicas, a las que remito mediante las abreviaturas usuales). La bibliografía en las páginas 265 y siguientes describe todas las obras mencionadas. Para facilitar la lectura, he preparado un índice analítico. Consultándolo, es posible ubicar fácilmente los pasajes paralelos o complementarios y las definiciones de términos técnicos. Así, con su ayuda, los capítulos se pueden leer en cualquier orden.

Aunque no he rehúido el uso de fórmulas matemáticas, los conocimientos requeridos para entender todos los detalles de la exposición son más bien modestos. Pienso que —con las explicaciones del Vocabulario— ella está enteramente al alcance de quien haya tomado unos pocos cursos de matemáticas en una facultad de ciencias o en una escuela profesional (de ingeniería, economía, arquitectura, etc.). Pero aun quien no tenga esa preparación podrá leer con provecho la mayor parte del libro, omitiendo uno que otro párrafo en que la pista se le ponga pesada.

Agradezco a la Facultad de Humanidades de la Universidad de Puerto Rico, la editorial Königshausen & Neumann, la *Revista Latinoamericana de Filosofía*, Kluwer Academic Publishers, Springer Verlag y la Editorial de la Universidad de Puerto Rico por la autorización para reproducir escritos míos originalmente publicados por ellos. En las páginas 283 y 284 doy las fichas bibliográficas pertinentes.

Igual que mis libros anteriores, éste sólo se pudo escribir gracias al apoyo incansable de Carla Cordua y a la libertad que me da la Universidad de Puerto Rico en Río Piedras. Me alegra tener esta oportunidad de reconocerlo.

Carolina (Puerto Rico), 25 de enero de 1994.

1

El mundo: presencia e idea

Una de las preguntas filosóficas más interesantes que uno puede hacerse sobre la cosmología se refiere al modo como se ofrece a nuestra consideración el tema mismo de esta ciencia. Para averiguar cómo se nos da un tema casi siempre es útil examinar cómo es que hablamos de él. Al tema de la cosmología —en griego, *κόσμος* (*cosmos*)— lo llamamos en román paladino 'el mundo'. Esta expresión funciona gramaticalmente de dos maneras. *Primero,* como nombre propio de algo único, el Mundo, "el mismo de todos", que nos rodea y abarca, y cuya presencia nos es más entrañable aún que la de la casa que habitamos o la del lecho en que dormimos, porque es constante e ineludible e inalienable. *Segundo,* como nombre común, por ejemplo, cuando el metafísico habla de los infinitos mundos posibles, entre los cuales Dios habría escogido el mejor, este mismo en que estamos reunidos; o cuando el físico calcula y compara diversos "modelos de universo", cerrado o abierto, estático o expansivo, eterno o fechado. Evidentemente, la palabra 'mundo' tiene que emplearse como nombre común en cuanto intentamos formarnos un *concepto* de qué es, o de cómo es el mundo. Pues un concepto es siempre general, aunque de entrada se sepa que comprende un solo caso particular.

Los dos usos de la palabra "mundo" indican dos modos de dársenos lo mentado por ella: como *presencia* inmediata o mediado por un concepto o —como de preferencia diríamos en el habla cotidiana— representado por una *idea.* No puede sorprendernos tal dualidad, ya que todas las cosas se nos dan, típicamente, de estas dos maneras; al menos todas las que llegan alguna vez a presentársenos. Recurrimos a la idea como sustituto y complemento de la presencia. Gracias a la idea podemos considerar la cosa mientras está ausente y también podemos llegar a conocerla con más detalle y bajo más aspectos que los que presenta de una sola vez. La idea de mundo es por cierto superflua como *sustituto* de su presencia infaltable, pero parece tanto más necesaria como *complemento* de ella, pues la presencia inmediata del mundo, aunque cabal y sin reservas, es notoriamente inarticulada. La misma razón por la que al parecer es indispensable tener una idea del mundo determina también que no sea fácil juzgar la corrección de la idea que nos hacemos de él. Pues, la corrección o justeza de la idea ha de medirse por la presencia patente de la cosa misma a que se refiere. Y la presencia del mundo, aunque nunca nos elude, es más bien una presencia latente, no patente.

Consideremos esto con más calma. Para juzgar si la idea que tenemos de una cosa es justa, y en qué medida lo es, prestamos atención a la cosa misma, cuando se nos presenta en persona. Pero el mundo como tal, aunque está presente entero en todo momento, no es algo a lo que se pueda dirigir la atención. Por su naturaleza misma, nuestra atención recae siempre sobre cosas o procesos, sus aspectos y relaciones, y no sobre el mundo que los engloba. Podemos atender a un cruce de calles, o a las palabras de un interlocutor, o al comportamiento de una rata en un laberinto, pero no podemos atender al mundo. Hagamos la prueba de enfocarlo con la mirada y veremos que ésta acaba siempre yendo a parar, no en el mundo mismo, sino en algún objeto particular dentro de él. Es paradójico que el mundo, cuya presencia no nos falta jamás, nos escape justamente en cuanto procuramos fijar en él la atención. Extraña presencia es ésta, de la que sabemos todo el tiempo que está ahí, y que, no obstante, se sustrae a cada intento de captarla.

La solución de esta paradoja nos proporciona también la clave para entender la peculiar índole de lo que vengo llamando 'presencia del mundo'. La solución descansa en un hecho sencillo y familiar que puede expresarse así: *Cada vez que atendemos, desatendemos.* Cada vez que otorgamos nuestra atención a algo, a este papel por ejemplo, o a las palabras que aquí escribo, tenemos que denegársela a todo lo demás. La atención, como se suele decir, debe ser exclusiva, y por lo mismo tiene en la desatención su indispensable complemento. Pero —en contraste con el olvido divino, que según ciertos teólogos devuelve la criatura olvidada a la nada de donde salió— la desatención del hombre no anonada a los objetos desatendidos. Más aún, la desatención ni siquiera menoscaba la presencia de dichos objetos. Las personas y cosas desatendidas, aquéllas a que no atendemos ahora y también aquéllas a que no hemos atendido nunca, están ahí, formando el trasfondo contra el cual se destaca o el suelo sobre el cual se alza el objeto momentáneo de nuestra atención. Y ese fondo permanente e inmenso de lo que no tenemos de momento entre manos es lo que llamamos *la presencia del mundo.* Atado a esa presencia por un sinnúmero de conexiones ignoradas, el objeto atendido permanece sumido en ella por la masa opaca de su interior. Y el hombre que le presta atención seguramente se consideraría ajeno a esa presencia, mero transeúnte o exiliado en el mundo, si fuera solamente la pura conciencia traslúcida que han descrito algunos filósofos, si no sintiera el peso sordo de sus entrañas, si cayera todas las noches en el olvido de sí.

No ha de sorprendernos pues que, aunque insoslayable, el mundo nunca nos dé la cara. No es posible, entonces, confrontar nuestra idea del mundo con una percepción, siquiera aproximada, de cómo es. Se dirá que ello nada tiene de raro; que lo mismo ocurre con tantos objetos particulares que son demasiado vastos o demasiado complejos para captarse con un sólo golpe de vista. Para conocer la ciudad de Roma, hay que recorrer sus calles una a una. Para darnos una idea del Imperio Romano, centenas de eruditos han dedicado sus vidas a escrutar los numerosos testimonios de su historia. Se dirá además, que todo nuestro conocimiento, aún el de las cosas más humildes, sigue un patrón similar, construyendo su objeto por recolección, comparación y síntesis de sus diversos aspectos y detalles. La tarea es más fácil en algunos casos, más ardua y arriesgada en otros, pero en todos esencialmente igual. Y del mismo modo que hemos llegado a tener una idea bastante adecuada de la anatomía y fisiología de la rana, bien podríamos llegar a conocer la estructura y funcionamiento del universo, analizando y combinando sus partes integrantes. No cabe duda de que la mayoría de los investigadores que trabajan actualmente en el desarrollo de una cosmología científica conciben su labor de esta manera y no piensan que haya una diferencia esencial entre el estudio de las cosas particulares y el estudio del mundo entero a partir de sus respectivas manifestaciones perceptibles. Sin embargo, el claro contraste entre la presencia del mundo y el modo de presentársenos las cosas intramundanas debiera prevenirnos contra la tentación de exagerar la similitud de estas dos formas de estudio. Hay entre ellas, por cierto, una estrecha relación; pero ésta es más compleja que un mero paralelismo.

La construcción del objeto del conocimiento a partir de una presentación parcial de sus aspectos e ingredientes procede siempre guiada por criterios, normas y métodos de aplicación general. El más familiar de todos ellos es la analogía. Se completa la construcción del objeto parcialmente presentado por analogía con otro semejante que se conoce mejor. Se trata de un procedimiento tan elemental, que de ordinario ni nos damos cuenta que lo estamos aplicando. Así, el médico espontáneamente ausculta el corazón al lado izquierdo del pecho de un paciente que ve por primera vez, porque a ese lado lo llevan todas —o casi todas— las personas que ha conocido en su vida. Pero, indispensable como es en la vida cotidiana y en la investigación científica de fenómenos particulares, la analogía de nada puede servirnos en nuestro empeño de construir una idea del mundo, pues no conocemos otro mundo, ni mucho menos una familia de mundos, que nos procure un término de comparación y una base para razonamientos analógicos acerca del mundo presente. He aquí, pues, una circunstancia que rompe el paralelismo entre las dos formas de estudio mencionadas. Se dirá, sí, que ella no es decisiva. El pensamiento analógico, aunque imprescindible para orientarnos en la realidad, es una forma de pensamiento derivada y no fundamental: se nutre de otra forma de pensamiento realmente básica, el pensamiento hipotético o conjetural. Me explico. Como no hay dos cosas idénticas, el razonamiento analógico, que completa la idea de una cosa conocida a medias apelando a su semejanza con otras que se conocen mejor, deriva su fuerza de una hipótesis o conjetura sobre la pertinencia de las similitudes que se toman en consideración. El uso de hipótesis para fundar una analogía es sólo una entre las varias formas como se emplean las hipótesis en la construcción del objeto del conocimiento. Y en este aspecto, de veras fundamental y decisivo, no parece haber diferencia entre el estudio de las cosas particulares y el estudio del universo en su conjunto. ¿Qué otro camino puede haber para hacerse una idea del universo, que el de bosquejarla hipotéticamente en un acto de adivinación genial y contrastar luego las consecuencias de la hipótesis con los pedazos de universo a que efectivamente tenemos acceso? Pues el mismo camino ha de seguirse en la investigación de las cosas intramundanas. También en este caso, especialmente si se trata de cosas vastas y complejas, la hipótesis, la conjetura, en otras palabras, la adivinación precede y orienta la busca y ordenación de los datos que se espera integrar en la idea del objeto estudiado. Desde que Hertz logró en 1887 realizar en su laboratorio la primera minitrasmisión radial, confirmando la hipótesis adelantada por Maxwell un cuarto de siglo antes, la historia de la ciencia ha corroborado una y otra vez la prioridad de la hipótesis, la necesidad de disponer de antemano de un esquema interpretativo incluso para ver las cosas como son.

El primado de la hipótesis, que da al traste con la esperanza de algunos filósofos de fundar la soberanía del pensamiento analógico en una pretendida "lógica inductiva", suscita a la vez un grave problema de método. Cualquier colección de datos parciales sobre una cosa o sobre una clase de cosas, o sobre el mundo en su conjunto, puede ser explicada igualmente bien por un sinnúmero de hipótesis incompatibles entre sí. ¿Cómo elegir la hipótesis correcta? Los filósofos de la ciencia se inclinan a opinar que la hipótesis preferida ha de ser en cada caso la más simple de las diversas alternativas viables. Esta preferencia, plausible mientras se creyó que el mundo era la obra de un Supremo Ingeniero empeñado en conseguir la máxima riqueza de efectos con el mínimo despliegue de recursos, suele justificarse en nuestro siglo ateo por razones de comodidad. Tal justificación implica por cierto una renuncia a conocer la verdad de lo real, pues la hipótesis más cómoda, esto es, la más manuable para el hombre, no tiene por qué ser la más verdadera. Pero el problema a que he aludido no es éste, sino otro que parece mucho más grave. Los filósofos de la ciencia han invertido grandes esfuerzos en determinar un criterio de simplicidad que permita decidir inequívocamente en cada caso cuál es la hipótesis que se debe preferir, pero su empeño ha sido vano. Lo que es más simple desde un punto de vista o en cierto contexto, no lo es desde otro o en un contexto distinto. Haría falta un criterio superior para poder elegir entre los criterios propuestos y convertir en ciencia el mito de la simplicidad. Lo curioso es que este problema, a todas luces insoluble, que debiera tener sumida a la ciencia en la más completa desorientación, sólo tiene vigencia en las discusiones de los filósofos. En cada una de las grandes épocas de la ciencia no han circulado a la vez más que unas pocas hipótesis alternativas concernientes a una familia dada de fenómenos. El conflicto entre ellas se ha podido dirimir generalmente apelando a la experiencia.

Nunca ha habido que afrontar la elección entre un gran número de hipótesis contradictorias e igualmente conciliables con los hechos, como en la pesadilla filosófica descrita.

¿A qué se debe esto? En parte quizás a la falta de imaginación y la pereza mental de los hombres de ciencia, que no se afanan por hallar nuevas explicaciones de las cosas mientras dispongan de una que trabaja satisfactoriamente y se deja corroborar por los fenómenos observados. Pero también se debe a que la libre admisión de hipótesis alternativas está fuertemente restringida, en cada fase de la historia de la ciencia, por la exigencia de que toda hipótesis propuesta para dar cuenta de un grupo particular de fenómenos concuerde con las hipótesis de orden más general aceptadas como válidas por la comunidad científica. Así, por ejemplo, si todavía hay algún punto oscuro en la teoría del arco iris, las hipótesis ofrecidas para aclararlo deben ser compatibles con la teoría electromagnética vigente. Sólo si un fenómeno resiste tenazmente todos los intentos de explicarlo dentro del marco de la ortodoxia establecida, puede ocurrir, cuando las circunstancias son propicias, que la reflexión sobre el mismo conduzca a una revisión radical de la ciencia vigente y abra paso a la constitución de una nueva ortodoxia. (Ejemplo: la radiación del cuerpo negro estudiada por Planck hacia 1900; cf. Capítulo 8).

Las características anotadas de la historia de la ciencia me sugieren una conjetura sobre la verdadera índole de la idea del mundo y su función en la economía del conocimiento. En las dos grandes épocas clásicas de la ciencia occidental, la ciencia aristotélica prevaleciente durante la antigüedad tardía y el medioevo islámico y cristiano, y la ciencia galileo-newtoniana fundada en el siglo XVII y dominante hasta comienzos del siglo XX, la investigación e interpretación de los fenómenos naturales se enmarcaba en un esquema básico o plan maestro del cosmos que constituía, por así decir, la espina dorsal de la ortodoxia científica respectiva. Tal esquema cósmico o idea del mundo —diametralmente diversa en cada época— no respondía sino mínimamente a las sugerencias de la observación. Era típicamente una idea previa, un "proyecto de mundo", diseñado por uno o más pensadores, basado principalmente en consideraciones apriorísticas relativas a la racionalidad de lo real, y perpetuado en parte por su atractivo intrínseco —lo que llamaríamos su belleza—, en parte también por su valor comprobado como guía de fructíferas investigaciones de detalle.

El cosmos aristotélico es finito, porque es imposible concebir un infinito actual, y está completamente lleno, porque la existencia de un lugar vacio tendría consecuencias absurdas. El cosmos finito es esférico, porque esta es la forma más perfecta y porque no hay ninguna razón para que sea mayor en una dirección que en otra. Como es esférico, tiene un centro. Ello determina los movimientos naturales de las sustancias corpóreas: en línea recta hacia el centro y desde el centro y en círculos alrededor del centro. Hay sustancias en torno nuestro como el fuego y la tierra que se mueven naturalmente en cada una de las dos maneras indicadas primero; pero ninguna sustancia familiar se mueve en círculos alrededor del centro del mundo. Por lo tanto, concluye Aristóteles, tiene que existir una sustancia desconocida para nosotros que se mueva naturalmente de esta última manera. De esa sustancia están hecho los astros y la bóveda celeste. Su movimiento circular, periódico y eterno, constituye el tiempo cósmico y gobierna los ritmos del mundo sublunar. Se consuma así la separación radical entre la tierra y los cielos, tan grata a la piedad helénica,[1] que justifica la diferencia metodológica entre la astronomía antigua y medieval, geométrica y bastante precisa, y la física de la misma época, cualitativa y vaga.

---

1. Cuenta Diógenes Laercio (II.12) que Anáxagoras de Clazómenas fue acusado de impiedad en Atenas, en pleno siglo de Pericles, por decir que el sol es una masa de metal incandescente (*διότι τὸν ἥλιον μύδρον ἔλεγε διάπυρον*).

Acabar con esta separación fue uno de las primeras decisiones de la revolución científica de los siglos XVI y XVII que desemboca en la concepción del universo newtoniano. Éste consiste en una multitud muy grande, posiblemente infinita, de partículas de una misma materia, difundidas por un espacio infinito, en el cual se desplazan en el curso del tiempo. Aunque la materia, como enseña la Biblia, ha sido creada en un momento y probablemente será aniquilada en otro, el tiempo mismo corre parejamente de eternidad a eternidad. Antes de la creación de la materia y después de su aniquilación subsiste el espacio vacío, homogéneo, igual en todas direcciones. Cada partícula material es un centro de fuerzas que actúan sobre las otras partículas —mas no sobre el espacio— de la manera siguiente: una partícula libre de la acción de fuerzas externas sólo puede moverse en línea recta, recorriendo distancias iguales en tiempos iguales; la intervención de fuerzas externas la aparta en mayor o menor grado —dependiendo de la magnitud de la fuerza y la cantidad de materia de la partícula— de su comportamiento normal, prescrito como se acaba de decir por la estructura intrínseca del espacio y del tiempo. Los historiadores citan diversas razones metafísicas y religiosas que pueden haber motivado esta idea del mundo. Más decisiva que todas ellas, si no como fuente de su invención, en todo caso como causa de su triunfo, es, a mi modo de ver, una simple razón metodológica: la visión del universo material abierto en el espacio infinito es la única que garantiza la aplicabilidad de la geometría de Euclides al estudio de todas las cosas naturales, que es la piedra angular del programa de la ciencia moderna.

La revolución científica del siglo XX no ha cristalizado aún en una ortodoxia estable y omnicomprensiva como los sistemas aristotélico y newtoniano. Pero no faltan indicios de que si algún día tal ortodoxia llega a consolidarse, ella descansará como sus predecesores en una idea cosmológica. Hacia 1920, cuando las primeras victorias de la teoría de la gravitación de Einstein, el matemático y físico Hermann Weyl, en su gran obra *Espacio, tiempo y materia* (1918; 5ª ed., 1923), trazó las líneas de un programa global para la física de nuestro tiempo. El universo se concibe allí como una variedad diferenciable de cuatro dimensiones portadora de estructuras matemáticas capaces de representar —eventualmente— todas las fuerzas de la naturaleza. Pero el programa de Weyl pasó pronto a segundo plano cuando la invención de la Mecánica Cuántica en 1925 y su brillante carrera de éxitos atrajo la atención de casi todos los investigadores jóvenes hacia la microfísica. En el siguiente cuarto de siglo, la ciencia natural, turbada por los horrores políticos que trastornaron la vida de tantos de sus cultivadores, cegada también por el falso relumbre de la filosofía positivista que concebía a las teorías científicas como meros sistemas de cálculo para la predicción de observaciones, la ciencia natural, digo, afligida por tanta calamidad, tiende a aceptar resignada que haya varias teorías científicas diferentes, competente cada una en su específico campo de aplicación, aunque mutuamente contradictorias en las zonas fronterizas. En esos años aciagos, el afán de unidad y coherencia pervive sólo en la obra de unos pocos hombres de ciencia distinguidos: el propio Einstein, fiel al programa de Weyl hasta su muerte; Sir Arthur Eddington y E. A. Milne, que la comunidad científica internacional ve como un par de ingleses excéntricos. Significativo para nosotros es que estos dos buscaran, cada uno a su modo, la unificación de las teorías físicas por la vía de la especulación cosmológica, asentada resueltamente en consideraciones apriorísticas. Cosmológica también es la preocupación dominante en las investigaciones más recientes dirigidas a lograr una síntesis de la teoría macroscópica de la gravitación y la teoria microscópica de las fuerzas nucleares y electromagnéticas.[2]

2. Este tema está tratado en los excelentes libros de divulgación de Stephen Hawking, *Breve historia del tiempo* (1988), y de Steve Weinberg, *Los primeros tres minutos* (1977) y *Sueños de una teoría final* (1993).

Si tales esfuerzos conducen a la creación de una física unitaria encuadrada en una cosmología, veremos una vez más a la investigación metódica y sistemática de los fenómenos naturales ordenarse entre los dos polos de la presencia del mundo, que llama la atención sobre las cosas discernibles en su seno, y la idea del mundo, que las dispone, esquemática pero nítidamente, en una estructura de conjunto. Conjurada por la presencia, la investigación estaría guiada nuevamente por la idea. Pero aunque la idea esté por su mismo nombre referida a la presencia, nada autoriza para pensar que la articulación delineada por aquélla está de algún modo contenida en ésta, que la idea, fruto de la razón, en algun sentido retrata la presencia prerracional en que la razón descansa. Sólo una filosofía acrítica puede confundir así el alfa y el omega, el origen y la meta, el eje y el norte de la brújula, el suelo nutricio del árbol de la ciencia y la dirección en la que éste crece; o, para decirlo sin metáforas, sólo un pensamiento acrítico puede identificar la idea reguladora del cosmos, que ilumina y orienta el progreso de la experiencia, con la presencia indiferenciada del "mundo en sí".

2

La cosmología como ciencia empírica

Cosmología de ayer y de hoy

Sólo en los últimos setenta a ochenta años la cosmología se ha convertido en una especialidad científica bien diferenciada de la física, con su propio campo de fenómenos que explicar y una literatura floreciente, cada día más incomprensible para los no especialistas, que se nutre ávidamente de los últimos avances de la física básica a la vez que genera problemas e ideas que pueden resultar valiosos también en otros frentes de la ciencia. Podría decirse que obtuvo su consagración oficial en 1978 cuando le dieron el premio Nobel de física a A. A. Penzias y R. W. Wilson por un descubrimiento cosmológico. Y sin embargo la cosmología podría alegar que es la rama más antigua de la ciencia, que ahora por fin alcanza respetabilidad profesional. Pues, como todo el mundo sabe, la especulación sobre el universo marcó el inicio de la ciencia griega hace dos mil quinientos años.

La nueva cosmología, empero, sólo muy indirectamente es una continuación de la antigua, a saber, sólo en cuanto las especulaciones cosmológicas griegas fueron la simiente de nuestra física. Y aunque la nueva cosmología aborda algunos de los problemas de la antigua —por ejemplo, la cuestión de si el universo es espacialmente finito o infinito, y de si ha existido eternamente o sólo por un tiempo limitado— ciertamente no nació de un deseo de resolverlos. Así, en el primer texto de la nueva cosmología, Einstein (1917) aventuró una hipótesis grandiosa sobre la geometría global del universo, no porque quisiese emular a los presocráticos, sino porque pensaba que con ella resolvía lo que le parecía ser una dificultad grave de su teoría de la gravitación. Y los físicos Penzias y Wilson, expertos en microondas al servicio de una gran compañía telefónica, admitieron que la señal débil pero constante que escuchaban a 4080 MHz debía interpretarse como un eco de la creación, sólo después que otras interpretaciones más pedestres —no cosmológicas— habían fracasado.

Lo que principalmente separa la antigua cosmología de la nueva es que ésta, como ciencia empírica que es, no pretende ser definitiva: sus aseveraciones no se ofrecen como verdades eternas, sino sólo como escalones desechables para la praxis investigativa. Por lo mismo, no es probable que la cosmología científica vaya a satisfacer eventualmente el ansia de una "cosmovisión científica" que motiva en buena medida el interés del público en sus logros.

Fenómenos cosmológicos

Para que la cosmología subsista como un campo especializado de investigación científica tiene que haber fenómenos específicamente cosmológicos, esto es, procesos observables que se explican mediante hipótesis concernientes a la estructura global y evolución conjunta del mundo físico. En la actualidad, la mayoría de los hombres de ciencia concuerda en que los dos fenómenos siguientes son cosmológicos en este sentido:

(1) El *corrimiento cosmológico hacia el rojo* que Slipher (1913, 1915, 1917) observó por primera vez, esto es, el desplazamiento sistemático de las líneas espectrales hacia frecuencias más bajas en la luz procedente de galaxias remotas, el cual se interpreta normalmente como un testimonio de que el universo se expande.

(2) La *radiación térmica del trasfondo* descubierta por Penzias y Wilson (1965), interpretada normalmente como una reliquia de una etapa temprana en la evolución del universo, en que la materia y la radiación se hallaban

en equilibrio térmico a muy alta temperatura y su distribución espacial era casi totalmente homogénea.

Para entender el descubrimiento de Slipher debemos recordar que la frecuencia observada ν_o de una señal periódica difiere de la frecuencia de emisión ν_e según como se mueva la fuente relativamente al observador. Este es el llamado *efecto Doppler* que, cuando la distancia recorrida por la señal luminosa no es —en términos astronómicos— muy grande, se rige por la siguiente fórmula, debida a Einstein:

$$z = \frac{\nu_e - \nu_o}{\nu_e} = 1 - \sqrt{\frac{c-u}{c+u}} \tag{2.1}$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío y u es el componente en la dirección de la señal luminosa de la velocidad con que se mueve la fuente relativamente al observador (u es un número negativo si la fuente se acerca al observador, positivo si se aleja). Si u es mucho menor que c, de tal modo que el término $(u/c)^2$ pueda desdeñarse, la fórmula (2.1) se reduce a la ecuación clásica de Doppler: $z = u/c$.[1]

Si suponemos que cada línea espectral —producida según la física actual cuando los átomos de un cierto elemento "saltan" de uno a otro de sus característicos estados de energía— exhibe siempre y en todas partes la misma frecuencia de emisión (digamos, a ojos de un observador que se mueve *con* la fuente), podemos obviamente calcular la velocidad radial de las fuentes astronómicas —esto es, la velocidad con que avanzan hacia la Tierra o se alejan de ella— mediante la fórmula (2.1). Basta reemplazar ν_e por la frecuencia de emisión distintiva de una línea espectral conocida y ν_o por la frecuencia observada de esa misma línea en la radiación procedente de la fuente en cuestión. (Nótese

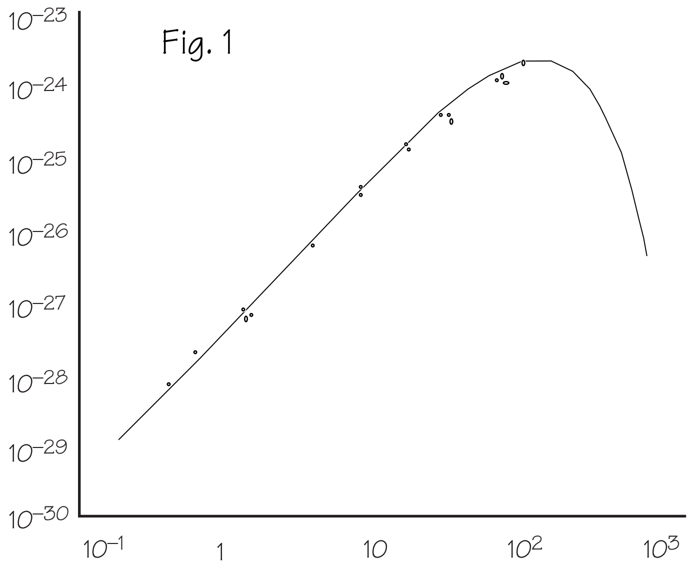
1. Para comprobarlo, multiplique el numerador y el denominador de la fracción bajo el signo radical en (2.1) por $(c-u)^2(c+u)$, divídalos por c^2 y ponga $(u/c)^2 \approx 0$.

que de acuerdo con (2.1) todas las líneas en el espectro de una fuente dada se desplazan en la misma proporción z y, por ende, se las puede identificar fácilmente por su posición relativa entre las líneas observadas).

Slipher se propuso justamente utilizar el efecto Doppler para determinar la velocidad radial de los objetos astronómicos. A poco andar comprobó que mientras en el caso de las estrellas, z se repartía, como era de esperar, parejamente entre valores positivos y negativos, la inmensa mayoría de las galaxias exhibían un espectro "corrido hacia el rojo" ($z > 0$; $\nu_e > \nu_o$), lo que implica que se alejan de nosotros. En los años 20, E. P. Hubble desarrolló métodos confiables para estimar la distancia entre las galaxias y la Tierra y anunció en 1929 la llamada *Ley de Hubble*: la velocidad de retroceso de las galaxias es directamente proporcional a la distancia. Este efecto sorprendente se explica sin dificultad *si el espacio mismo se está expandiendo* de acuerdo con las predicciones deducidas de la Teoría General de la Relatividad por A. Friedmann (1922, 1924) y luego, independientemente, por G. Lemaître (1927). Se debe tener en cuenta, eso sí, que en un universo de Friedmann la fórmula (2.1) vale sólo localmente, pero no puede aplicarse a objetos muy lejanos. A resultas de ello, (i) la Ley de Hubble debe enunciarse como una relación de proporcionalidad entre la distancia que nos separa de cada galaxia y el respectivo corrimiento hacia el rojo z, pero para calcular la velocidad de retroceso de una galaxia lejana hay que introducir hipótesis sobre la geometría global del universo; (ii) el factor de proporcionalidad entre z y la distancia —cuyo valor *actual* es la famosa "constante" de Hubble H_0— probablemente *varía* con el tiempo; (iii) el efecto Doppler *cosmológico* sería propiamente un efecto *geométrico* muy distinto por naturaleza del efecto acústico descrito por C. J. Doppler en 1842.

Pasando ahora a la radiación del trasfondo, anoto sus dos características más notables. *En primer lugar*, el flujo de energía a cualquier frecuencia dada no varía con el tiempo ni la dirección. En otras palabras, la radiación es *uniforme* e *isotrópica*. A menos que vivamos en un punto excepcional del espacio, la isotropía implica homogeneidad. Por lo tanto, de acuerdo con el "Principio copernicano" a que me refiero en la próxima sección, hemos de concluir que la radiación térmica del trasfondo llena parejamente todo el universo. Más aún, la pequeñísima anisotropía detectable puede atribuirse consistentemente al movimiento propio de la Tierra a través del mar de radiación estacionario. Por otra parte, la radiación misma no es atribuible a una fuente astronómica determinada. *En segundo lugar*, si trazamos una gráfica de la energía radiada a las distintas frecuencias, la curva resultante corresponde a una radiación térmica ("radiación del cuerpo negro") de temperatura ligeramente inferior a 3 K (véase la fig. 1).[2] La presencia ubicua de tal radiación atestigua que hubo una época en que se hallaba en equilibrio térmico con la materia, lo cual —según la ciencia actual— sólo pudo ocurrir si el universo era entonces muchísimo más denso y caliente de lo que es ahora. Si el universo se expande homogénea e isotrópicamente, la radiación del trasfondo eventualmente se desacopla de la materia. Una vez desacoplada, si la expansión continúa, la radiación se sigue enfriando, pero retiene su estructura de radiación térmica (re-

2. Esta identificación de la radiación del trasfondo con una radiación térmica pudo otrora cuestionarse, debido a que la atmósfera terrestre no deja pasar la radiación de ciertas frecuencias infrarrojas. (Como es sabido, también filtra las ultravioletas, pero este hecho no es significativo en el presente contexto). Según la Ley de Planck —reproducida en el Capítulo 8, ecuación (8.2)— una radiación térmica de la temperatura indicada alcanza el máximo de energía a la frecuencia de aproximadamente 45 GHz, que cae dentro de la zona excluida. Por lo tanto, no se puede establecer mediante mediciones terrestres si la curva de la radiación de trasfondo culmina donde tendría que culminar si es de veras una radiación térmica. Pero observaciones efectuadas fuera de la atmósfera con instrumentos a bordo de satélites artificiales han disipado toda duda al respecto.



Curva de la radiación térmica a 2.76 K. Las abscisas representan la frecuencia expresada en gigahertz (escala logarítmica). Las ordenadas representan la densidad de la energía, expresada en ergs por centímetro cúbico por hertz. Los puntos indican el resultado de mediciones de la radiación del trasfondo, efectuadas sobre la tierra.

flejada en la representación gráfica de la energía en función de la frecuencia).

Aun a la luz de una explicación sumaria como ésta, debiera ser claro que los fenómenos mencionados sólo revisten una significación cosmológica entretejidos en un contexto riquísimo de pensamiento científico. Las observaciones sin conceptos son mudas y, por ende, prácticamente ciegas. Un cambio de perspectiva teórica puede conferirle valor cosmológico a fenómenos que antes carecían de él. Así, para los partidarios de la teoría cosmológica del universo estable (*Steady-State Theory* o SST), que postula que el universo se ve más o menos igual desde cualquier sitio en cualquier época, el principal fenómeno cosmológico es *la*

oscuridad de la noche, que les parece prueba suficiente de la expansión del universo. Basan esta interpretación en un argumento que ya se le había ocurrido a Kepler, pero que se conoce como *la paradoja de Olbers* (por el astrónomo alemán H. W. M. Olbers, 1758-1840): un observador que reciba simultáneamente luz emitida en todas las épocas del pasado por fuentes estacionarias distribuidas homogéneamente en todo el espacio, tendría que ver cada trocito del cielo lleno de luz estelar de intensidad media igual, digamos, a la del sol. La paradoja se resuelve si las fuentes se están alejando de acuerdo con la Ley de Hubble, pues entonces la frecuencia y por ende la energía de la luz recibida disminuye en proporción a la distancia de las respectivas fuentes. Por otra parte, para quienes adoptan una concepción evolucionista del universo, como la teoría cosmológica del Gran Cataplum (*Big Bang Theory* o BBT),[3] la paradoja de Olbers no surge siquiera, puesto que la oscuridad del firmamento nocturno se explica fácilmente con la suposición muy natural de que la luz emitida hasta la fecha por todas las fuentes que hay en el universo no basta para llenarlo.

Principios generales

La premisa fundamental de la cosmología científica es que las leyes físicas que pueden establecerse mediante observaciones y experimentos efectuados en nuestra época por el hombre sobre la Tierra o cerca de ella valen en todos los tiempos a través del universo entero. Obviamente la estructura y evolución globales del universo podrán conocerse a

3. Utilizo la expresión ‘Gran Cataplum’ como equivalente castellano de ‘Big Bang’ porque refleja mejor que otras traducciones más solemnes la intención burlona con que Fred Hoyle —partidario de la SST— le puso ese nombre a la teoría rival.

través de la experiencia sólo si todos los rasgos pertinentes de los fenómenos físicos pueden detectarse —al menos en principio— en nuestros laboratorios y observatorios. La investigación cosmológica sería arbitraria y puramente fortuita si no osasemos postular, por ejemplo, que las interacciones de alta energía tienen lugar en nuestros aceleradores de partículas esencialmente del mismo modo que en la etapa temprana, densa y muy caliente del universo. Por otra parte, nadie pretende que las leyes universales de la naturaleza coincidan exactamente con las fórmulas impresas en nuestros manuales. ¿Tenemos derecho, entonces, a cambiar algunas de estas fórmulas cuando no se ajustan bien a nuestras hipótesis cosmológicas? Algunos hombres de ciencia han creído que sí. Por ejemplo, para explicar la divergencia entre la llamada "edad del universo" (esto es, el tiempo trascurrido desde que toda la materia estaba aglomerada en un pequeñisimo "terrón" superdenso) que se deduce del fenómeno cosmológico del corrimiento hacia el rojo, y la edad aparentemente mayor que hay que atribuir a nuestro planeta a la luz de la geología, Milne no tuvo inconveniente en postular dos escalas de tiempo naturales, encarnadas en distintos grupos de fenómenos periódicos, que concuerdan en intervalos breves pero a la larga divergen.[4] Y Dirac aventuró la hipótesis de que la "constante" de gravitación varía lentamente, para garantizar la constancia de otros números que le merecían más respeto, tales como la razón entre el volumen de un nucleón y el volumen del universo observable, y la razón entre la interacción gravitacional de las dos partículas que forman el átomo de hidrógeno y su interacción electromagnética (Dirac estimó que estas dos razones o

4. Ahora sabemos que la "edad del universo" deducida del corrimiento hacia el rojo, que Hubble calculaba en unos 2 mil millones de años, es por lo menos cinco veces mayor. Los estimados actuales —entre 10 y 20 mil millones de años— son perfectamente compatibles con la edad de 5 mil millones de años que la geología atribuye a la Tierra.

cocientes eran iguales, $\approx 10^{-40}$).

Los fundadores de la SST, H. Bondi y T. Gold, creían que la física desarrollada por el hombre sólo podía ser universalmente aplicable si nuestra propia ubicación en el tiempo y en el espacio no era en absoluto excepcional. Proclamaron por eso que la cosmología científica presuponía la validez del *Principio cosmológico perfecto*: *El universo exhibe siempre y en todas partes el mismo aspecto general.* Irónicamente, este principio, destinado a asegurar la validez universal de la física terrestre, condujo a Bondi y Gold a alterar sus leyes. Para conciliar el retroceso de las galaxias con la postulada invariabilidad del aspecto general del universo postularon una ley para la cual no podían ofrecer ni el más leve indicio de verificación experimental. Conforme a esa ley, la materia está siendo creada continuamente en todas partes a razón de aproximadamente dos nucleones por kilómetro cúbico por siglo.

Con el descubrimiento de la radiación térmica del trasfondo casi todos los hombres de ciencia se han convencido de que hace algunos miles de millones de años el universo presentaba un aspecto muy diferente. Además, hay claras indicaciones de que ciertos objetos astronómicos —los llamados cuasares— abundan menos ahora que antes. Ello constituye por cierto una refutación de la SST. Aunque la SST ha sucumbido a la experiencia, todavía vale la pena señalar que su motivación filosófica, arriba enunciada, era errónea. No hay que confundir las leyes generales de la física con las circunstancias particulares de su aplicación. La universalidad de aquéllas no implica la uniformidad de éstas. Antes bien, es por la misma variedad de la naturaleza que sus regularidades llegan a conocerse. Nuestra aptitud para crear ambientes inusitados y provocar procesos excepcionales ha pesado mucho más en el avance de la ciencia que lo que pudiere haber de típico en la posición que ocupamos en el universo.

Aunque el Principio cosmológico perfecto es rechazado por la gran mayoría de los cosmólogos, se acostumbra a dar por supuesto que nuestro particular punto de observación, sobre la superficie del planeta Tierra, no ocupa un lugar privilegiado *en el espacio*. Este supuesto se suele llamar *Principio copernicano.* Combinado con la isotropía de la radiación del trasfondo y de la distribución global de las galaxias, el Principio copernicano implica que el universo es isotrópico en todas partes y, por lo tanto, que es homogéneo. Por otra parte, una cosmología evolucionista tiene que reputar excepcional a la época presente como tal, por cuanto en esta época la vida inteligente puede subsistir al menos en algunos sitios, y no es —como fue antes y volverá ser más tarde— *absolutamente imposible en todo el universo*. Como es obvio, cualquier teoría del universo profesada dentro del universo presupone, como condición de su propia posibilidad, que la inteligencia florezca en alguna parte al menos por un tiempo. Este supuesto, llamado *Principio antrópico*, suele invocarse en la literatura para dar cuenta de algunos hechos cosmológicamente significativos. Por ejemplo, bajo el sistema corrientemente aceptado de leyes físicas, el Principio antrópico implica que las constantes fundamentales de la naturaleza no podrían tener valores muy diferentes de los que revela la observación.

El espacio-tiempo: una variedad de Riemann

La contribución más decisiva de la matemática a la cosmología del siglo XX es el concepto de variedad riemanniana. Gracias a él, es posible hablar inteligentemente de la forma, el tamaño y la edad del universo y enunciar hipótesis que vinculan estas propiedades a la distribución observable de la materia y la radiación. Para explicar qué es una variedad riemanniana debo aclarar primero el concepto más general de variedad diferenciable *n*-dimensional, que

Riemann introdujo en 1854 bajo la apelación barroca de "magnitud extendida continuamente *n* veces (*n-fach stetig ausgedehnte Grösse*)".

Consideremos cualquier superficie lisa como la superficie de un huevo o de un guante de goma. Como sabemos por el ejemplo de la geografía, una superficie así puede ser representada completamente mediante un *atlas*, esto es, una colección de mapas *planos*, cada uno de los cuales representa un trozo de la superficie en cuestión. Continuando con la analogía geográfica, cada una de estas representaciones parciales se llama una *carta*. Idealmente, las cartas de un atlas deben cumplir los siguientes requisitos:

(1) Cada punto de una carta representa un punto único de la región respectiva. En otras palabras, hay una correspondencia biunívoca (uno a uno) entre los puntos de cada región representada por una carta del atlas y los puntos de la carta que la representa.
(2) Para cada punto de la superficie hay al menos una carta en que ese punto está representado junto con un entorno (posiblemente muy pequeño) de puntos que lo rodean. Las cartas del atlas cubren, pues, conjuntamente la superficie entera y ningún punto de la superficie está representado exclusivamente por puntos situados en el mismo límite de las cartas a que pertenecen.
(3) Las cartas preservan la continuidad: las partes vecinas de la región representada por una carta dada están representadas por partes vecinas de la carta.
(4) Si una misma región $\mathcal{R}$ de la superficie está representada en dos cartas C_1 y C_2, entonces la partes de C_1 y C_2 que representan a $\mathcal{R}$ están cada una representada en la otra mediante una correspondencia biunívoca que preserva la continuidad.

Cada uno de los puntos de una página plana puede identificarse mediante un par de números reales o *coordenadas*, de tal modo que rectángulos contiguos en la página correspondan a “rectángulos” contiguos en $\mathbb{R}^2$, la estructura que reúne a todos los pares de números reales.[5] Si la página en cuestión es una carta que representa una región $\mathcal{R}$ de la superficie suave de que hablábamos, entonces las coordenadas de los puntos de la página también ofrecen una representación de $\mathcal{R}$ en virtud de una correspondencia biunívoca que preserva la continuidad. Es razonable llamar a esta representación una carta numérica o *carta real* (el adjetivo ‘real’ se emplea para distinguir nuestro caso de aquél en que los puntos de la página se identifican mediante números complejos). Una colección de cartas reales que satisfaga los requisitos (1) al (4) constituye un *atlas real* de la superficie. (Tal representación numérica podría servir, por ejemplo, para registrar en la memoria de una computadora el contenido informativo de un atlas corriente). La correspondencia descrita por la condición (4) entre dos cartas reales que cubren una misma región de la superficie es una función que asigna pares de números reales a pares de números reales, llamada *transformación de coordenadas.* Por lo tanto, en el caso de un atlas real, tiene sentido reemplazar la condición (4) por la siguiente condición más estricta:

(4′) Si dos cartas C_1 y C_2 representan una misma región de la superficie, entonces la transformación de coordenadas en virtud de la cual C_1 está representada en C_2 y la transformación inversa en virtud de la cual C_2 está representada en C_1 son ambas infinitamente diferenciables (esto es, poseen derivadas parciales de todo orden en todos los puntos en que están definidas).

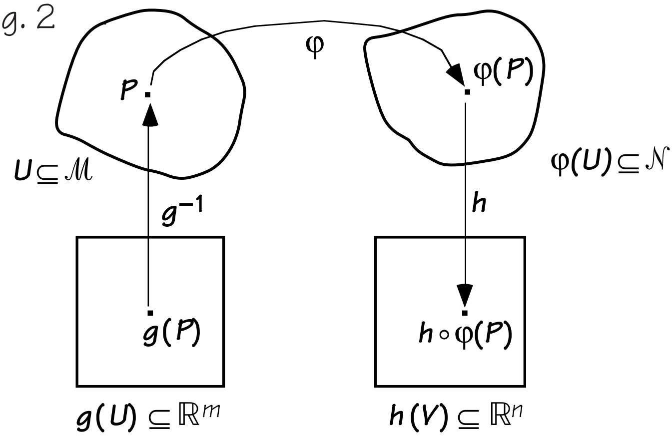
Estos conceptos de carta real y atlas real se prestan de inmediato para una generalización obvia. Considérese un sistema Σ de objetos que posea alguna forma de continuidad

5. Sean a, b, c y d números reales tales que $a < b$ y $c < d$. El “rectángulo” $(a,b) \times (c,d)$ es el conjunto de todos los pares de números reales $\langle x,y \rangle$ tales que $a < x < b$ y $c < y < d$.

y que pueda representarse por trozos mediante triples, cuádruplos o, en general, n-tuplos de números reales (por ejemplo, el sistema de los sonidos, que puede representarse mediante triples de números que varían, respectivamente, con la altura, el timbre y la intensidad). Si la representación mediante n-tuplos numéricos preserva la continuidad —en el sentido descrito en la condición (3)— decimos que constituye una n-carta (real) de Σ. Una colección de n-cartas de Σ que cumpla las condiciones (1), (2), (3) y (4′) es un n-atlas (real, infinitamente diferenciable) de Σ. Cualquier sistema de objetos asociado a un tal n-atlas constituye una *variedad diferenciable n-dimensional* (real). Si reflexionamos un poco sobre la forma habitual de rotular los sucesos —o mejor dicho, su ubicación relativa en el devenir cósmico— mediante tres coordenadas espaciales y una coordenada temporal, nos daremos cuenta en seguida de que la física matemática siempre ha concebido el escenario cósmico o "arena" del acontecer como variedad 4-dimensional, pues tales sistemas de coordenadas espacio-temporales evidentemente cumplen las cuatro condiciones señaladas. Dicha variedad se llama *espacio-tiempo*.

Las definiciones precedentes tienen una importante ventaja matemática: nos permiten hablar en un sentido preciso de correspondencias "diferenciables" entre variedades cualesquiera. Supongamos que φ le asigna a cada punto P de una variedad m-dimensional $\mathcal{M}$ un punto único $\varphi(P)$ en una variedad n-dimensional $\mathcal{N}$. Sea g una carta de $\mathcal{M}$ definida en un entorno U de P y sea h una carta de $\mathcal{N}$ definida en un entorno V de $\varphi(P)$. Como es habitual, g^{-1} designa la inversa de g, esto es, la correspondencia biunívoca que asigna a cada m-tuplo numérico en la imagen de g el punto de $\mathcal{M}$ al cual g le da ese valor. Entonces, la función $h \cdot \varphi \cdot g^{-1}$ asigna a cada m-tuplo numérico en la imagen de g un y sólo un n-tuplo numérico en la imagen de h (véase la fig. 2). Por lo tanto, tiene perfecto sentido preguntarse si ella es diferenciable o no. Decimos que φ es diferenciable en P si y sólo si $h \bullet \varphi \bullet g^{-1}$ es diferenciable en $g(P)$. Si $h \bullet \varphi \bullet g^{-1}$ es infinitamente diferenciable en $g(P)$ decimos que φ es *lisa* (A. *glatt*; I. *smooth*) en P.[6] Como las transformaciones de coordenadas son infinitamente diferenciables por definición, la lisura de φ en P no depende de la selección de las cartas g y h. Decimos que φ es una *aplicación lisa* de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ si es lisa en cada punto de $\mathcal{M}$.

Fig. 2



La figura ilustra la función $h\Sigma\varphi\Sigma g^{-1}$ descrita en el texto.

Este concepto de aplicación lisa nos permite extender la noción geométrica de *curva* a cualquier variedad diferenciable n-dimensional $\mathcal{M}$. Una *curva* en $\mathcal{M}$ es una aplicación lisa $\gamma:(a,b) \rightarrow \mathcal{M}$, donde (a,b) es un intervalo abierto en el cuerpo de los reales $\mathbb{R}$ ($(a,b) = \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$), admitiéndose la posibilidad de que $a = -\infty$, o $b = \infty$, o ambas cosas a

6. Los matemáticos distinguen clases de lisura, correspondientes al orden de las derivadas envueltas; una aplicación de clase C^0 es continua pero no necesariamente diferenciable; una de clase C^n tiene derivadas continuas de orden n. Para no distraer al lector con complicaciones que aquí no nos interesan, he formulado mis definiciones de tal modo que las aplicaciones "lisas" sean precisamente las de la clase C^∞.

la vez (en este último caso, $(a,b) = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$).[7] Obsérvese que si $\mathcal{M}$ es el espacio ordinario, lo que corrientemente llamamos "curva" viene a ser, conforme a esta definición, la *imagen* o *alcance* de una curva, esto es, el conjunto de puntos del espacio que son valores de γ para distintos valores del parámetro $x \in (a,b) \subseteq \mathbb{R}$. En lo sucesivo, si la aplicación $\gamma{:}(a,b) \rightarrow \mathcal{M}$ es una curva, llamo a la imagen de γ el *camino* de γ en $\mathcal{M}$.[8]

En la geometría ordinaria nos preguntamos por la longitud de las curvas. En una variedad n-dimensional arbitraria esta pregunta admite una respuesta sólo si la variedad posee una estructura más rica que la que he descrito. Riemann comprendió que los rasgos estructurales suplementarios que se requieren para ello pueden definirse de varios modos y se interesó por uno en particular. Una variedad n-dimensional real dotada de la estructura suplementaria estudiada por Riemann se llama *variedad riemanniana n-dimensional*. Para dar una idea de lo que esto es, recurro nuevamente al ejemplo de las superficies, que son variedades bidimensionales.

Considérese una curva γ en un plano π, cuyo camino une el punto P con el punto Q. Marquemos en él una serie de puntos $P_1, \ldots, P_{n-1}$, a distancias aproximadamente iguales. Ponemos $P_0 = P$ y $P_n = Q$. Sean x^1 y x^2 coordenadas cartesianas del plano (los números alzados inmediatamente contiguos a la variable x son *índices*, no *exponentes*). Sea Δx^i_j la variación en la i-ésima coordenada al pasar de P_j a P_{j+1} ($i = 1,2$; $1 \leq j \leq n$). Entonces, según el Teorema de Pitágoras, la distancia entre los puntos P_j y P_{j+1} es igual a la raíz cuadrada

7. En una presentación más rigurosa, distiguiríamos distintas clases de curvas, correspondientes a las distintas clases de lisura mencionadas en la nota 6. Una curva continua en $\mathcal{M}$ es una aplicación $\gamma{:}(a,b) \rightarrow \mathcal{M}$, de la clase C^0. Una curva de la clase C^n es una aplicación de la clase C^n. Para simplificar, dí una definición de 'curva' que cubre únicamente las curvas de la clase C^∞.

8. El camino de γ es pues el conjunto $\{P \in \mathcal{M}{:}\ \exists x(x \in (a,b) \& P=\gamma(x))\}$. Algunos autores prefieren llamar 'camino' (F. 'chemin', I. 'path') a lo que yo llamo 'curva' y 'curva' a lo que yo llamo 'camino'.

positiva de $(\Delta x_j^1)^2 + (\Delta x_j^2)^2$ (los números alzados que figuran *fuera de los paréntesis* son exponentes).[9] Las cuerdas que unen puntos consecutivos en nuestra lista forman un polígono cuya longitud es igual a la suma $\sum_{j=0}^{n-1} \sqrt{(\Delta x_j^1)^2 + (\Delta x_j^2)^2}$. Incrementando el número de puntos más o menos equidistantes marcados en la curva formaremos un polígono cuya longitud se aproxima cada vez más a lo que intuitivamente llamamos la longitud de la curva. De acuerdo con esta intuición *definimos* la longitud $s(\gamma)$ de la curva γ como el límite a que converge dicha suma cuando n crece indefinidamente:

$$s(\gamma) = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \sqrt{(\Delta x_j^1)^2 + (\Delta x_j^2)^2} = \int_\gamma \sqrt{(\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2} \tag{2.2}$$

El integrando de la última expresión es el *elemento lineal* del plano, que llamaremos ds. Su cuadrado $(\mathrm{d}s)^2$ puede obviamente escribirse $1{\cdot}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^1 + 0{\cdot}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2 + 0{\cdot}\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^1 + 1{\cdot}\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^2 = \sum\delta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$ (donde $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$). Si sustituimos nuestro sistema de coordenadas cartesianas (x^1,x^2) por un sistema arbitrario (u^1,u^2), obtendremos una nueva expresión para ds, de la forma $\sum g_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j$, donde las g_{ij} son funciones de las coordenadas determinadas por la condición $\sum g_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j = \sum\delta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$. (Por ejemplo, si adoptamos las coordenadas polares $u^1 = r$, $u^2 = \theta$, con su centro en el origen del sistema (x^1,x^2), entonces $g_{11} = 1$, $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{22} = (r)^2$).

9. La fórmula citada expresa el cuadrado de la distancia entre P_j y P_{j+1} en la unidad de medida propia de nuestro sistema de coordenadas cartesianas, la cual es igual a la distancia entre el punto con coordenadas $\langle 0,0\rangle$ —el origen del sistema— y el punto con coordenadas $\langle 1,0\rangle$.

Supongamos ahora que la curva γ no está situada sobre el plano, sino sobre una superficie curva σ en el espacio. Nuevamente definimos su longitud $s(\gamma)$ como el límite de una secuencia de longitudes de polígonos:

$$s(\gamma) = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \sqrt{(\Delta x_j^1)^2 + (\Delta x_j^2)^2 + (\Delta x_j^3)^2} = \int_\gamma \sqrt{\Sigma \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^i} \tag{2.3}$$

donde las x^i son coordenadas cartesianas *del espacio* y por ende el índice de sumación i en el elemento lineal toma los valores 1, 2 y 3. Pero Gauß mostró hacia 1820 que la longitud de γ también puede expresarse en términos de una 2-carta de la superficie σ, con coordenadas u^1 y u^2, mediante una integral de la forma $\int_\gamma \sqrt{\Sigma g_{ij} \mathrm{d}u^i \mathrm{d}u^j}$, donde las g_{ij} son funciones que dependen de las coordenadas según una regla característica de la superficie σ (y los índices de sumación i y j toman, por cierto, solamente los valores 1 y 2). El integrando $\Sigma g_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j$ es el elemento lineal de la superficie σ, designado también con ds. Si reemplazamos el sistema de coordenadas (u^1,u^2) por otro sistema (v^1,v^2) tenemos que sustituir las funciones g_{ij} en la expresión del elemento lineal por otro conjunto de funciones h_{ij}, tales que $\Sigma h_{ij}\mathrm{d}v^i\mathrm{d}v^j = \Sigma g_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j$, pues la longitud de la curva obviamente no puede variar con una transformación de coordenadas (tiene que ser lo que se llama un "invariante" de la transformación). Por lo tanto,

$$h_{ij} = \sum g_{pq}(\partial u^p/\partial v^i)(\partial u^q/\partial v^j) \tag{2.4}$$

donde los índices de sumación p y q toman los valores 1 y 2. Una regla que asigne a cada 2-carta de la superficie σ un conjunto de cuatro funciones g_{ij} que satisfaga esta ley de transformación define un *campo tensorial* (covariante, de rango 2) sobre σ. Como el campo tensorial de que se trata aquí rige la medición de las longitudes, lo llamamos el *campo métrico* o simplemente la *métrica* de σ. Las funciones g_{ij} son los *componentes* de la métrica (o componentes métricos) con respecto a la carta correspondiente.

Las siguientes observaciones nos serán útiles más adelante:

(i) La misma naturaleza del elemento lineal implica que los componentes métricos con respecto a una carta dada no pueden todos anularse a la vez en un punto de σ; expresamos esta propiedad diciendo que la métrica es un campo tensorial sin singularidades o *no-singular*.

(ii) Evidentemente, si ds es el integrando en el lado derecho de la ecuación (2.3), la expresión que figura allí bajo el signo radical puede escribirse $(\mathrm{d}s)^2$. Es claro que $(\mathrm{d}s)^2 > 0$ siempre, ya que de otro modo la longitud de una curva podría ser imaginaria o nula. La métrica tiene, pues, que ser lo que se llama un campo tensorial *positivo-definido*.

(iii) No hay ninguna razón para distinguir entre el componente g_{12}, que multiplica el producto $\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^2$, y el componente g_{21}, que multiplica el producto $\mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^1$. Por lo tanto, la métrica debe ser un campo tensorial *simétrico*: para cualquier carta de σ, el sistema respectivo de componentes satisface la identidad $g_{ij} = g_{ji}$.

(iv) La superficie σ admite sistemas de coordenadas cartesianas (x^1,x^2) con respecto a las cuales los componentes métricos toman los valores constantes $g_{ij} = \delta_{ij}$ si y sólo si ella puede desarrollarse sobre un plano (por ejemplo, si σ es la superficie de un cilindro, o de un cono). En tal caso, la geometría plana está realizada sobre σ, como se comprueba fácilmente enrollando un papel con figuras geométricas para formar un cilindro o un cucurucho (la operación no altera la longitud de las líneas ni el tamaño de los ángulos). La existencia de una carta con respecto a la cual los componentes métricos con subíndices iguales tienen el valor constante 1 y los componentes métricos con subíndices desiguales tienen el valor constante 0 debe considerarse pues como una propiedad característica de la geometría plana.

Para obtener el concepto de *variedad riemanniana* basta extender estas ideas al caso de una variedad n-dimensional cualquiera. Sea, pues, $\mathcal{M}$ una variedad diferenciable n-dimensional (real), con atlas $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ y sea g un campo tensorial (covariante, de rango 2) simétrico y no-singular definido sobre $\mathcal{M}$. Consideremos una curva $\gamma:(a,b) \rightarrow \mathcal{M}$, cuyo camino esté incluido en el dominio de una carta $u \in \mathcal{A}(\mathcal{M})$. Si g es positivo-definido podemos definir sin más la longitud de γ por la integral $\int_\gamma \sqrt{\Sigma g_{ij} \mathrm{d}u^i \mathrm{d}u^j}$, donde los g_{ij} son los componentes de g con respecto a u y los índices de sumación i y j toman todos los valores de 1 a n. (Aunque el camino de γ no caiga entero dentro del dominio de una sola carta, su longitud puede construirse por trozos usando esta definición). Pero también en el caso de que g no sea positivo-definido, es posible hacer comparaciones cuantitativas entre las curvas de $\mathcal{M}$ utilizando la llamada "integral de la energía", $\int_a^b \Sigma g_{ij} \mathrm{d}u^i \mathrm{d}u^j$. Las curvas de longitud o "energía" extrema (máxima o mínima) son las *geodésicas* de $\mathcal{M}$ (obsérvese que, según esta definición, las geodésicas del plano y del espacio ordinario son precisamente las líneas rectas). La estructura $\langle \mathcal{M}, g \rangle$ —esto es, la variedad $\mathcal{M}$ premunida del campo tensorial g— es una variedad riemanniana n-dimensional; igual que en el caso bidimensional considerado arriba, g se llama la *métrica* de la variedad.[10] Si $\mathcal{M}$ puede

10. Algunos autores dicen que $\langle \mathcal{M}, g \rangle$ es variedad *riemanniana* sólo si g es positivo-definido. Si no lo es, dicen que $\langle \mathcal{M}, g \rangle$ es una variedad

cubrirse con cartas con respecto a las cuales los componentes métricos $g_{ij} = \pm\delta_{ij}$, decimos que $\langle\mathcal{M},g\rangle$ es una variedad *plana*. Puede demostrarse que $\langle\mathcal{M},g\rangle$ es plana si y sólo si cierto campo tensorial determinado por la métrica —el llamado *tensor de Riemann*— es idéntico a 0; esto es, si cada uno de los componentes del tensor de Riemann respecto de cada carta de $\mathcal{M}$ es una función constante igual a 0. Si el tensor de Riemann no es idéntico a 0, suele decirse que la variedad riemanniana $\langle\mathcal{M},g\rangle$ es *curva*.[11] Por eso, el tensor de Riemann suele también llamarse 'tensor de curvatura'. Pero llamaré 'curvatura' a secas —por ejemplo, cuando se habla de un espacio de curvatura constante— a la función numérica definida en términos del tensor de Riemann en la ecuación (4.6)

Como demostró Minkowski (1907, 1909), los principios de la Relatividad Especial obligan a distinguir un campo tensorial covariante de rango 2, simétrico y no-singular, definido sobre el espacio-tiempo. Por lo tanto, el espacio-tiempo, según lo concibe dicha teoría, es en efecto una variedad riemanniana cuadridimensional. El campo tensorial en cuestión, conocido como la *métrica de Minkowski*, puede caracterizarse fácilmente en términos de sus componentes con respecto a cualquiera de las cartas privilegiadas, ligadas a marcos de referencia inerciales, introducidas por Einstein (1905a, § 1) pero denominadas habitualmente "cartas de Lorentz". Con respecto a una carta de Lorentz con coor-

---

semi-riemanniana o *pseudo-riemanniana*. Según el caso, *g* sería una métrica riemanniana o semi-riemanniana.

11. Obsérvese que una superficie curvada pero desarrollable sobre un plano es, según esto, una variedad bidimensional *plana*. Este modo de hablar es razonable, puesto que, como vimos, la geometría sobre tal superficie concuerda en todo con la geometría plana. Cualquier otra superficie curvada lisa es una variedad bidimensional *curva*. Por otra parte, el significado intuitivo de las palabras 'plano' y 'curvo' arroja muy poca luz sobre el significado de estos adjetivos aplicados a variedades riemannianas de más de dos dimensiones.

denada temporal x^0 y coordenadas espaciales x^1, x^2, x^3, los componentes de la métrica de Minkowski tienen los valores constantes $g_{ij} = \delta_{ij}$ a menos que $i = j = 0$, y $g_{00} = -c^2$. Aquí c es la velocidad de la luz en el vacío, expresada en las unidades que se usaron para definir la carta. Si dichas unidades se eligen de modo que $c = 1$ (por ejemplo, si el tiempo se mide en segundos y el espacio en múltiplos de la distancia recorrida por la luz en un segundo), el elemento lineal del espacio-tiempo minkowskiano, en términos de la carta en cuestión, está dado por

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \qquad (2.5)$$

De acuerdo con nuestras definiciones, la métrica de Minkowski es plana pero no es positivo-definida, puesto que $(ds)^2$ puede obviamente ser positivo, negativo o igual a 0. Si $(ds)^2 = 0$ a lo largo de todo el camino de una curva diremos que ésta es una curva *nula* (del alemán *null*, que significa 'cero'). Si $(ds)^2 < 0$ a lo largo de todo el camino de una curva, entonces no existe ninguna carta de Lorentz en que dos puntos diferentes de ese camino tengan la misma coordenada temporal. En consecuencia, relativamente a cualquier marco de referencia inercial, los distintos puntos de dicho camino se suceden en el tiempo. Tales curvas se llaman, por eso, *temporaloides* (A. *zeitartig*, I. *timelike*). Si $(ds)^2 > 0$ a lo largo de todo el camino de una curva, entonces para cada par de puntos diferentes situados sobre ese camino hay alguna carta de Lorentz que asigna a ambos la misma coordenada temporal. Tales curvas se llaman *espacialoides* (A. *raumartig*, I. *timelike*).[12] Los procesos que constituyen la

12. La métrica de Minkowski también puede definirse de modo que en la ecuación (2.5) los tres términos dependientes de las coordenadas espaciales vayan precedidos por el signo menos (–) y el término dependiente de la coordenada temporal vaya precedido por el signo más (+). Entonces, la condición $ds^2 > 0$ caracteriza a las curvas *temporaloides* y la condición $ds^2 < 0$ a las *espacialoides.* Otra

historia de un objeto físico llenan un tubo en el espacio-tiempo. Si el volumen espacial del objeto es insignificante, ese tubo se reduce al camino de una curva, la *cosmolínea* del objeto.[13] La Relatividad Especial implica que la cosmolínea de una partícula con masa $m > 0$ es siempre el camino de una curva temporaloide, mientras que la cosmolínea de una partícula sin masa (vgr. un cuanto de luz o fotón) es el camino de una curva nula. La cosmolínea de una partícula masiva en movimiento inercial es una *geodésica* temporaloide.

La teoría de la gravitación de Einstein y el nacimiento de la cosmología moderna

La médula de la Teoría Especial de la Relatividad es una prescripción sobre la forma matemática de las leyes de la naturaleza. Ésta debe ser la misma con respecto a cualquier carta de Lorentz y por lo tanto debe permanecer invariante bajo una "transformación de Lorentz" que sustituya una de esas cartas por otra. Pero la mejor confirmada de todas las leyes de la física clásica, la Ley de Gravitación Universal de Newton, no es invariante bajo las transformaciones de Lorentz. La teoría de la gravitación de Einstein —que él

---

modalidad convencional que se observa en los textos más antiguos consiste en distinguir la coordenada temporal con el índice 4, en vez del índice 0 utilizado aquí.

13. Minkowski —que llamó 'Welt' ('mundo') al espacio-tiempo— llamaba a esa curva 'Weltlinie' (literalmente 'línea de mundo' o 'línea mundana'). García Bacca (1941, p. 119) tradujo 'línea cósmica'. Me parece, sin embargo, que el prefijo 'cosmo-' suena bien en nuestro idioma, permite formar con naturalidad términos como 'cosmo-velocidad' y 'cosmoaceleración' para designar la primera y la segunda derivada de la posición de la partícula con respecto al tiempo propio (d*s* medido a lo largo de su cosmolínea), y señala claramente a las voces así formadas como términos técnicos ('velocidad cósmica', en cambio, podría entenderse que designa una velocidad *ordinaria* muy alta, vgr. la velocidad radial de las galaxias lejanas).

llama Teoría de la Relatividad General— fue su originalísima solución de esta dificultad, alcanzada al cabo de ocho años de labor. Ella se apoya en la notable similitud que hay entre la fuerza de gravedad de Newton y las fuerzas de inercia —esto es, las fuerzas *aparentes* a que atribuimos, en la mecánica newtoniana, los diversos componentes de la aceleración que exhibe un cuerpo en movimiento *inercial* cuando es referido a un marco de referencia *no-inercial*.[14] Son las *únicas* fuerzas de la física clásica que actúan del mismo modo sobre cualquier cuerpo, no importa cuál sea su constitución interna,[15] y contra las cuales no es posible protegerse mediante alguna forma de blindaje. Las fuerzas de inercia difieren, por cierto, de la gravedad, en cuanto no es posible señalar su origen en una fuente material; por esto la mecánica clásica las considera ilusiones engendradas por el uso de un marco de referencia inapropiado (no-inercial). Pero Ernst Mach, que no veía que hubiera un legítimo motivo *físico* para preferir los marcos de referencia inerciales a los no-inerciales y creía que el pertinaz alineamiento del péndulo de Foucault con respecto a las estrellas fijas indicaba una influencia de éstas, sugirió hacia 1880 que las fuerzas de inercia se deben a la acción de fuentes materiales muy lejanas (véase el Capítulo 4, Sección 3).

Para explicar el parecido entre la gravedad y la inercia, Einstein lisa y llanamente las identifica: las concibe como

14. Me refiero a la fuerza de inercia propiamente tal, la fuerza centrífuga y la fuerza de Coriolis. Entre las fuerzas de inercia suele incluirse además la llamada fuerza de d'Alembert, la cual es proporcional al componente adicional de la aceleración de un cuerpo en movimiento *no-inercial* relativamente a un marco *no-inercial* que no se explica por las tres fuerzas aparentes mencionadas ni por las fuerzas reales que aceleran a ese cuerpo relativamente a los marcos *inerciales.*

15. Por eso cualquier cuerpo es igualmente susceptible a la gravitación y a las fuerzas de inercia, como Newton comprobó con un margen de error de una parte en 10^3 (véase Capítulo 3, nota 13). Braginsky y Panov (1971; cf. 1972) confirmaron este resultado con un margen de error de una parte en 10^{12}.

manifestaciones, bajo diferentes circunstancias, de una y la misma propiedad de las cosas. Esta audaz ocurrencia no es más extravagante que la asimilación newtoniana del movimiento planetario a la caída de los graves. Einstein dio simplemente un paso más hacia la unificación intelectual de lo aparentemente heterogéneo, al extender el dominio de los fenómenos gravitacionales para que abarque los efectos de la inercia o, mejor dicho, al ampliar el concepto de movimiento inercial de modo que cubra la caída libre.

Para entender cómo esto es posible, recordemos que según la Relatividad Especial la cosmolínea de una partícula en movimiento inercial es una geodésica del espacio-tiempo. Es como si los objetos que una fuerza externa no empuje o atraiga en una u otra dirección estuviesen guiados de momento en momento por la geometría del espacio-tiempo que les fija una trayectoria. Einstein se negó a creer que el espacio-tiempo pudiese actuar de este modo sobre la materia sin que ella actuase sobre él a su vez. En su teoría de la gravitación resolvió esta paradoja con un golpe de genio. Según esta teoría, el espacio-tiempo es una variedad riemanniana curva cuya métrica varía de punto en punto conforme a la distribución de la materia, pero que en todas partes admite la misma aproximación lineal, a saber, la métrica plana de Minkowski (esto explica el éxito local de la Relatividad Especial en nuestros laboratorios). Un sistema de ecuaciones diferenciales —las ecuaciones de campo de Einstein— relaciona los componentes de un campo tensorial —el "tensor de tensión y energía"— que representa la distribución espacio-temporal de la materia y la energía no gravitacional, con los componentes de otro campo tensorial —el "tensor de Einstein"— formado con los componentes de la métrica y sus derivadas parciales de primer y segundo orden con respecto a las coordenadas. La métrica se puede calcular integrando estas ecuaciones. Una partícula en caída libre, con carga eléctrica y momento angular iguales a 0, traza una geodésica temporaloide de esta métrica. (De ahí que sea prácticamente imposible distinguir mediante experimentos locales la caída libre en nuestro mundo —por ejemplo, en una nave espacial— del movimiento inercial en un espacio-tiempo de Minkowski). La métrica desempeña pues la función de un potencial gravitacional. Cuando este potencial es débil y actúa sobre cuerpos de baja velocidad, sus efectos se aproximan al de un potencial newtoniano regido por la ecuación de Poisson. (Esto explica el éxito enorme de la Ley de Gravitación Universal de Newton).

Al atar así la red de geodésicas del espacio-tiempo a la distribución de la materia, la Teoría General de la Relatividad de Einstein logró a su manera la meta de Mach de entender la inercia, dondequiera se manifiesta, como una expresión de la presencia cósmica de la materia. En un comienzo, Einstein esperaba que su teoría rindiera en este sentido un resultado mucho más poderoso. "En una teoría de la relatividad consecuente —escribió en 1917— no puede haber inercia *con respecto al 'espacio'*, sino sólo una inercia *recíproca* de las masas. Por lo tanto, cuando una masa se aleja suficientemente en el espacio de todas las demás masas del mundo, su inercia tiene que reducirse a cero" (1917, p. 145). Esto supone que la métrica se anule en el infinito espacial.[16] Pero las ecuaciones de campo no implican tal anulación y Einstein fracasó en su intento de deducirla de ellas. La ocurrencia que tuvo para salir de esta dificultad dio nacimiento a la cosmología moderna.

Einstein observó que la relatividad de la inercia estaría plenamente asegurada si la influencia gravitacional de la materia fuera significativa en todas partes, como lo sería sin duda si el universo entero estuviese contenido en un volumen finito. La antigua objeción filosófica contra el universo finito —a saber, que se extenderá automáticamente si uno

16. Dicho de otro modo: que todos los componentes de la métrica con respecto cualquier carta tiendan al límite 0 si la distancia espacial desde el origen de la carta crece indefinidamente.

lanza un dardo más allá de sus linderos— pierde su fuerza si el espacio es una variedad riemanniana curva, pues —como el lector facilmente reconocerá por analogía con las superficies curvas— una variedad *n*-dimensional de esta clase bien puede ser infinita y no tener fronteras. Einstein creía a la sazón que los datos astronómicos justificaban la hipótesis de que las estrellas están repartidas más o menos homogéneamente por todo el universo y que sus movimientos relativos son más bien lentos. Por eso, para representar la distribución global de la materia adoptó el modelo de un gas estático, homogéneo, isotrópico y con presión igual a 0. Como sus ecuaciones de campo no admiten una solución que satisfaga estos requisitos modificó el tensor de Einstein agregándole un término proporcional a la métrica.[17] El factor de proporcionalidad —una nueva constante de la naturaleza que se conoce como "la constante cosmológica" y se designa con la letra griega λ— tiene que diferir muy poco de 0 para que las ecuaciones de campo modificadas sean compatibles con los fenómenos gravitacionales conocidos.[18] Con todo, si $\lambda \neq 0$ las ecuaciones admiten la solución deseada: un espacio-tiempo con la forma de una hipersuperficie "cilíndrica" de cuatro dimensiones en que las cosmolíneas de la materia se sitúan en la dirección longitudinal y las geodésicas espacio-temporales perpendiculares a cualquiera de esas cosmolíneas en un punto dado cubren una variedad riemanniana tridimensional finita pero sin límites, de curvatura constante positiva (una hipersuperficie "esférica" de tres dimensiones). La estructura idéntica que está realizada en cada una de estas variedades tridimensionales sería entonces lo que llamamos "el espacio físico".

17. En términos de componentes, esto quiere decir lo siguiente: Si E_{ij} es el (i,j)-ésimo componente del viejo tensor de Einstein, el componente correspondiente del tensor revisado es $E_{ij} - \lambda g_{ij}$ (donde g_{ij} es el (i,j)-ésimo componente de la métrica).

18. Datos obtenidos observando las galaxias lejanas imponen a $|\lambda|$ una cota superior del orden de 10^{-56} cm^{-2} (Sandage 1968).

Los universos de Friedmann

Apenas Einstein formuló sus ecuaciones de campo modificadas, Willem de Sitter (1917, 1917a, 1917b) las resolvió para un universo vacío (esto es, bajo la condición de que el tensor de tensión y energía sea idéntico a 0). El universo de de Sitter es estático, en cuanto no contiene ninguna cosa que pudiera cambiar, pero si insertamos en él una nube isotrópica de partículas de prueba —esto es, partículas masivas tan insignificantes que su presencia no altera la métrica— en caída libre, éstas se alejarán unas de otras a una velocidad proporcional a sus distancias mutuas. De Sitter, mejor informado que Einstein en materia de astronomía, señaló que los datos de Slipher sobre la velocidad radial de las galaxias confirmaban su solución.

Cinco años más tarde, Alexander Friedmann (1922, 1924) mostró que los modelos cosmológicos de Einstein y de Sitter eran casos límites de una familia infinita de soluciones de las ecuaciones de campo modificadas. Friedmann supuso que λ tenía cualquier valor, positivo, negativo o nulo. Representó la materia mediante un gas sin presión cuyas partículas en caída libre trazan geodésicas temporaloides que se distribuyen isotrópicamente en torno a cada una de ellas. Esta sencilla condición implica que en cada punto de una de esas geodésicas —cada instante en la vida de una partícula dada— está situado en un corte trasversal del espaciotiempo consistente en una variedad tridimensional de curvatura constante ortogonal (perpendicular) a todas esas geodésicas y separada, a lo largo de cada una de ellas, por el mismo intervalo temporal de cualquier otro corte trasversal que cumpla esta condición de ortogonalidad (véase la fig. 3).[19] Si ponemos, como antes, la velocidad local de la luz

19. Este teorema fue demostrado mucho más tarde, independientemente, por H. P. Robertson (1929) y A. G. Walker (1935, 1937). Friedmann (1922) lo introduce como una hipótesis más.

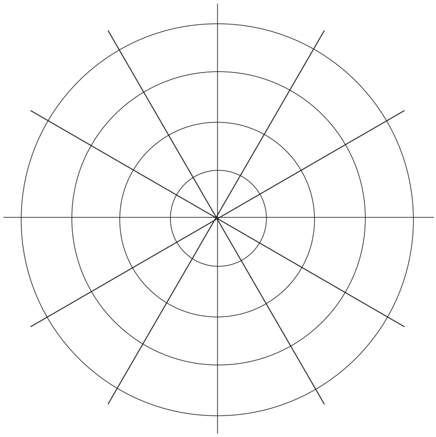


Fig. 3

Sección bidimensional de un universo de Friedmann en expansión. Las rectas representan cosmolíneas de partículas materiales; los círculos, geodésicas espacialoides ortogonales a dichas cosmolíneas. Dos dimensiones del espacio no están representadas. Para obtener una representación de una de ellas, hágase rotar la figura en torno a la recta vertical.

en el vacío $c = 1$ y adoptamos como coordenada temporal el tiempo propio t medido a lo largo de cada cosmolínea de la materia (vgr. por un reloj atómico que traza esa cosmolínea), el elemento lineal de las soluciones de Friedmann está dado por

$$ds^2 = R^2(t)d\sigma^2 - dt^2 \tag{2.6}$$

donde $d\sigma^2$ es el elemento líneal de alguno de esos cortes trasversales tridimensionales perpendiculares a las cosmolíneas de la materia y $R^2(t)$ es un factor de proporcionalidad dependiente del tiempo. En el instante t la métrica riemanniana positivo-definida con elemento lineal $\sqrt{R^2(t)d\sigma^2}$ determina la geometría del espacio físico. Ella cambia, como es obvio, con $R^2(t)$, pero la curvatura —constante, como se dijo, para cada t— sigue siendo positiva, negativa o igual a 0 si ya lo era. Por lo tanto, las soluciones de Friedmann pueden distinguirse con un índice k igual a 1, 0 ó –1 según que las curvaturas espaciales sean respectivamente mayores que, iguales a o menores que 0. La relación funcional entre $R^2(t)$ y t depende de este índice k y de la constante cosmológica λ. La fig. 4 traza la gráfica de t en función de la raíz cuadrada positiva $R(t)$ del factor de proporcionalidad $R^2(t)$, para los tres valores posibles de k, en el supuesto muy probable de que $\lambda = 0$ y que en algún momento t —por ejemplo, ahora mismo— $R(t)$ esté aumentando ($dR(t)/dt > 0$).

Las mediciones de la radiación del trasfondo y los recuentos de galaxias indican que, si se considera un ámbito bas-

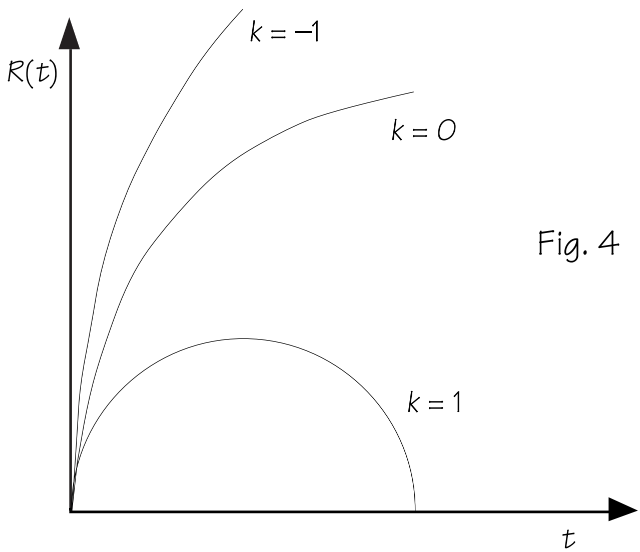


Fig. 4

Universos de Friedmann con “cataplum” inicial. Las abscisas representan valores sucesivos del tiempo propio t medido a lo largo de la cosmolínea de una partícula material típica. Las ordenadas representan el factor $R(t)$ que mide la expansión (y contracción) del espacio físico en función de t. El índice k distingue los universos con espacio lobachevskiano o euclidiano infinito y en expansión perpetua, de los universos cuyo espacio esférico finito se expande para luego recontraerse.

tante grande, la materia y la radiación están distribuidas en torno nuestro en forma casi perfectamente isotrópica. El Principio copernicano implica entonces que su distribución en torno a cualquier otro punto es igualmente isotrópica. La gravitación es la única fuerza física capaz de actuar vigorosamente a través de distancias astronómicas. Por lo tanto, si la gravitación está regida por las ecuaciones de campo de Einstein, la estructura global del universo estará bien representada, en una primera aproximación, por alguna de las soluciones de Friedmann.[20] El corrimiento sistemático hacia el rojo de la radiación proveniente de fuentes lejanas indica que el universo se está expandiendo. En el contexto de las soluciones de Friedmann, la constante de Hubble H_0 resulta ser igual al cociente $\dot{R}(t)/R(t)$, donde $\dot{R}(t)$ mide el cambio de $R(t)$ con el tiempo ($\dot{R}(t) = \mathrm{d}R(t)/\mathrm{d}t$). Como no hay ningún fenómeno que justifique un valor de $\lambda \neq 0$, el modelo friedmanniano del universo en que vivimos tendrá que elegirse entre los representados en la fig. 4. Como se puede ver, dos de ellos difieren bastante del tercero: si $k \leq 0$ la expansión continuará indefinidamente, mientras que si $k > 0$ el universo tiene que empezar algún día a contraerse. Además, la geometría nos enseña que un espacio de curvatura constante positiva es finito, mientras que uno de curvatura constante negativa o nula es infinito. Las ecuaciones de campo implican que $k \leq 0$ a menos que la densidad media actual ρ_0 de la materia y la energía no-gravitacional exceda cierto valor crítico $\rho_c \approx 1.9 \times 10^{-30}\mathsf{H}_0^2$ kg/m^3 (donde H_0 designa el *valor numérico* actual de la constante de Hubble

20. La presión, que Friedmann supone igual a 0, no parece influir en la configuración global del universo en la actualidad, pero puede haber sido importante en una etapa más temprana en que el universo era más denso. G. Lemaître, que redescubrió independientemente las soluciones de Friedmann en 1927, contempló modelos cosmológicos con presión isotrópica positiva o negativa. Esta hipótesis introduce una mayor variedad de modelos pero no afecta los rasgos esenciales de la familia de los espacio-tiempos homogéneos e isotrópicos.

medida en kilómetros por segundo por megaparsec;[21] un número que, según los mejores estimados, satisface la desigualdad $50 < H_0 < 100$). Si ρ_0 midiera sólo la densidad de la materia y la energía *visibles* su valor estaría bastante por debajo de ρ_c, pero hay razones para pensar que el universo contiene grandes cantidades de materia y energía cuya presencia no se refleja en nuestros telescopios. Por eso, hay quienes creen que $\rho_0 > \rho_c$. En tal caso, la vida se extinguirá destruida por el calor excesivo de un universo cada vez más denso, y no por el frío creciente en un universo en expansión perpetua.

Como el lector habrá advertido, en un universo de Friedmann las cosmolíneas de la materia definen un estándar natural de movimiento y reposo. Las variedades tridimensionales perpendiculares a esas líneas dividen el universo exhaustivamente en clases mutuamente excluyentes de sucesos simultáneos, con lo cual definen un tiempo universal. En el universo verdadero, imperfectamente homogéneo e isotrópico, las lineas cósmicas de la materia de hecho se apartan del trazado friedmanniano ideal. Pero este trazado puede establecerse sacando promedios o directamente a través del estudio de la radiación del trasfondo. Así, a partir de la ligera anisotropía de ésta calculamos el movimiento de la Tierra en el universo. Del mismo modo, aunque no es posible sincronizar exactamente con el tiempo cósmico dos relojes muy lejanos entre sí, se puede establecer una cronología universal aproximada pero significativa. Así pues, la cacareada relatividad del tiempo y el movimiento pasa a pérdida en la Teoría General de la Relatividad de Einstein.

Vemos en la fig. 4 que, cualquiera que sea el valor de k, el factor de proporcionalidad $R(t)$ tiende a 0 cuando t se acerca a un valor finito que llamaré t_0 (en la fig. 4, $t_0 = 0$, pero si en nuestra cronología le asignamos el número 0 a

---

21. 1 megaparsec ≈ 3.260.000 años luz.

la Hegira o al nacimiento de Cristo, t_0 será obviamente un número negativo). Como la densidad media del universo crece indefinidamente cuando $R(t)$ converge al límite 0, la métrica no puede estar definida para $t = t_0$. Por lo tanto, el número real finito que he denominado t_0 cae fuera del alcance de la coordenada temporal. Para captar mejor lo que esto significa, consideremos la cosmolínea de una partícula material cualquiera. En un universo de Friedmann dicha cosmolínea es en todo caso una geodésica temporaloide. Debemos considerarla, pues, como una aplicación $\gamma: \mathcal{I} \to \mathcal{M}$ de un intervalo abierto $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ en el espacio-tiempo $\mathcal{M}$. Se la puede definir de modo que la función compuesta $t \sum \gamma$ concuerde con la identidad en $\mathcal{I}$, esto es, de modo que γ le asigne a cada número en su dominio un punto espacio-temporal cuya coordenada temporal es precisamente ese mismo número. (En tal caso, decimos que γ está "parametrizada por el tiempo propio"). Entonces t_0 es el ínfimo o cota inferior mínima del intervalo en que γ está definida. El número t_0 cambia si recalibramos la coordenada temporal t y reparametrizamos γ de acuerdo con esto. Pero si t mide el tiempo propio, t_0 tiene que ser un número finito. Por lo tanto, el dominio de γ —esto es, el intervalo abierto en que está definida— no puede de ningún modo extenderse a todo el cuerpo de los reales $\mathbb{R}$. (Adviértase que si $k = 1$, el dominio de γ también tiene una cota superior). Decimos, por esto, que γ es una geodésica temporaloide *incompleta* y clasificamos a los universos de Friedmann que inevitablemente contienen tales geodésicas (*todos* los modelos con $\lambda \leq 0$ y *casi* todos los modelos con $\lambda > 0$) como espacio-tiempos relativistas *incompletos con respecto a geodésicas temporaloides*.[22] Ahora bien, aunque sea estéticamente insatis-

22. En inglés —el idioma en que primero se enunció esta clasificación— los llaman *timelike-geodesically incomplete spacetimes*, literalmente *espacio-tiempos geodésico-temporaloidemente incompletos.* Pero no quisiéramos imitar en nuestro castellano —lengua analítica y reflexiva— tales prodigios de aglutinación.

factorio, no hay nada absurdo en que una variedad riemanniana contenga geodésicas inextendibles[23] que no están definidas en todo $\mathbb{R}$.[24] Lo verdaderamente importante es que aun en una variedad así es imposible toparse con una frontera, por ejemplo, con un punto inicial de una geodésica temporaloide γ que nos induzca a preguntar en vano que es lo que hubo en el tiempo inmediatamente anterior. Todo suceso identificable en el camino de γ está precedido en él por otros sucesos, y aunque el lapso de tiempo en que ocurrieron todos los sucesos precedentes se acorta cada vez más según vamos retrocediendo en el tiempo, ninguno de esos sucesos pudo haber sido el primero de todos.

Friedmann llamó "el tiempo desde la creación del mundo" ("die Zeit seit der Erschaffung der Welt"—1922, p. 324) al tiempo propio trascurrido hasta hoy a lo largo de una geodésica temporaloide inextendible. Muchos físicos se han sentido incómodos con lo que esta frase insinúa. Al comienzo pensaron que la presencia de geodésicas temporaloides incompletas en los universos de Friedmann se debía a su perfecta isotropía y homogeneidad, y que las

---

23. Se dice que una geodésica γ_1 con dominio $\mathscr{I}_1 \subset \mathbb{R}$ es *extendible* si hay un intervalo $\mathscr{I}_2$, tal que $\mathscr{I}_1 \subset \mathscr{I}_2$, y una geodésica γ_2 definida en $\mathscr{I}_2(x)$, tal que $\gamma_2(x) = \gamma_1(x)$ para todo $x \in \mathscr{I}_1$ (esto es, si ambas curvas coinciden allí donde ambas están definidas).

24. El lector se convencerá de esto si considera que, dada una geodésica incompleta $\gamma_1 : \mathscr{I}_1 \rightarrow \mathscr{M}$ siempre existe una geodésica completa $\gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathscr{M}$ cuyo camino es exactamente el mismo. En efecto, sean $\mathscr{I}$ un intervalo finito (a,b), τ la traslación $x \mapsto x + a$, σ el cambio de escala $x \mapsto (b-a)x/\pi$, ρ la traslación $x \mapsto x + \pi/2$ y μ la aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que asigna a cada número real x el valor más próximo a cero de $\tan^{-1}(x)$. Entonces $\gamma_2 = \gamma_1 \bullet \tau \bullet \rho \bullet \mu$ aplica todo $\mathbb{R}$ sobre el camino de γ_1. Obviamente, si $\mathscr{M}$ es el espaciotiempo y γ_1 depende de un parámetro físicamente significativo, el parámetro de que depende γ_2 parecerá a primera vista muy artificial. Por ejemplo, si γ_1 depende del tiempo propio medido a lo largo de su camino, γ_2 depende de la *tangente* de esa cantidad física (recalibrada, pues la transformación $(\tau \bullet r \bullet \mu)^{-1}$ cambia el instante cero y la unidad de tiempo).

irregularidades del universo real impedirían que las cosmolíneas de la materia convergieran todas en un punto. Pero A. K. Raychaudhuri (1955) demostró que aun en un universo de Friedmann modificado, con perturbaciones de la densidad y expansión anisotrópica, las cosmolíneas de la materia convergían en el pasado a una distancia temporal finita de nosotros. Por último, en los años 60, R. Penrose, S. W. Hawking y R. P. Geroch probaron, en una serie notable de trabajos,[25] que todo espacio-tiempo relativista que satisfaga ciertos requisitos muy generales, físicamente muy verosímiles, es incompleto con respecto a geodésicas temporaloides.

Si el lector no soporta la idea de que la materia haya surgido, por así decir, de la nada hace 15 mil millones de años puede consolarse pensando en lo siguiente. Ninguna experiencia nos indica que las ecuaciones de campo de Einstein sean aplicables en las circunstancias extremas que prevalecerían en nuestros universos friedmannianos cuando t se aproxima a t_0; cambios menos drásticos en las condiciones experimentales han solido imponer correcciones importantes a las leyes de la física. En particular, en un universo muy denso los fenómenos microfísicos tendrían importancia cosmológica, pero la teoría de la gravitación de Einstein no es compatible con los principios cuánticos, firmemente asentados en nuestra experiencia de tales fenómenos. Por último, la teoría cuántica de las partículas elementales, que explica muy satisfactoriamente en combinación con la BBT el origen de la radiación del trasfondo y la produción del helio y los isótopos del hidrógeno en la proporción observada en la naturaleza, no ha sido puesta a prueba (y virtualmente carece de sentido) en situaciones en que la materia esté tan comprimida que las partículas conocidas se fusionen unas con otras. En rigor, el mismo concepto de un

25. Penrose 1965, Hawking 1965, 1966, 1966a, 1966b, 1967, Geroch 1966, Hawking y Penrose 1970.

lapso finito de tiempo propio difícilmente puede aplicarse sin arbitrariedad en una región del espacio-tiempo en que ninguno de los procesos cronométricos conocidos puede tener lugar.

Algunas reflexiones filosóficas

Este bosquejo de las principales ideas de la cosmología del siglo XX se basa en el doble supuesto de que (i) las interacciones gravitacionales que determinan la estructura global del universo están regidas por las ecuaciones de campo de Einstein y (ii) la materia está distribuida homogénea e isotrópicamente en el espacio. El supuesto (ii) es obviamente falso y sólo puede aceptarse como una primera aproximación útil en un estudio global a muy gran escala (aunque la isotropía de la radiación del trasfondo indicaría que dicha aproximación es mucho mejor de lo que uno hubiera creído). Pero también el supuesto (i) es falso, puesto que es incompatible con la Mecánica Cuántica y la Teoría Cuántica de Campos, cuya base empírica es firmísima. La formulación de una teoría cuántica de la gravitación que sea viable es una de las grandes tareas pendientes de la física. Entre tanto, hay que arreglárselas con lo que tenemos, y normalmente se acepta que no disponemos de una teoría de la gravitación más satisfactoria que la Relatividad General. Con todo, conviene preguntarse cómo hay que entender unos asertos cosmológicos derivados de principios reconocidamente inexactos por una "ciencia" que necesita de entrada una revisión posiblemente radical. No nos tranquilizará escuchar que esa es la condición de todas las ciencias básicas. Debemos tratar de comprender por qué esperábamos que las cosas fuesen de otra manera y cómo nuestro "sentido común" generó tales expectativas.

La pregunta "¿cuántos huevos hay en este canasto?" admite una respuesta definitiva que puede establecerse rápida-mente por inspección ocular. Pero las preguntas científicas y en especial aquellas que se refieren a cuestiones fundamentales como la composición última de la materia o la estructura global del universo no admiten tales respuestas definitivas. En el caso de estas cuestiones los mismos términos en que están planteadas pueden tornarse cuestionables. En la conversación ordinaria damos por sentada una serie de conceptos y enfoques, todo un modo de analizar nuestro entorno. Esta "visión del mundo del sentido común" es suficientemente idónea para nuestro quehacer cotidiano, pero los fundadores de la ciencia moderna la juzgaron inadecuada para su propósito de entender el plan de la naturaleza, y por eso la abandonaron. Especialmente en la física matemática la intelección de las cosas se ha buscado siempre siguiendo patrones muy ajenos a la conversación ordinaria. En un momento pudo parecer que Euclides y Newton habían encontrado los principios del verdadero sistema intelectual del universo. Pero ya no pensamos así y, lo que es más importante, ya no esperamos que tales principios vayan a encontrarse jamás. Tal como están las cosas, la opinión popular de que existe un tal sistema perfectamente bien definido que esta ahí esperando que lo descubran sólo puede fomentar el escepticismo, ya que es infinitamente improbable que logremos captarlo con certeza. Pero antes que desesperar del conocimiento humano —que, mal que mal, es el *único* de que tenemos conocimiento— debemos tratar de formarnos una concepción apropiada de cómo funciona.

En sus tareas diarias, el hombre de ciencia da por supuesto un sistema estable de nociones e hipótesis sin las cuales no podría hallarle sentido a sus observaciones. Pero tiene que darse cuenta de que este sistema no puede ser definitivo. Revisarlo, aumentar su precisión, coherencia y alcance, es una finalidad constante, aunque a menudo latente, de la ciencia. Aunque los resultados numéricos de la investigación científica son, en buena medida, inmunes a los cambios del sistema intelectual, su significado puede alterarse radicalmente en el curso de la evolución de ese sistema. Por ejemplo, los pesos atómicos establecidos en el siglo XIX todavía se aceptan, dentro de los márgenes de error con que se los midió, pero el número asignado, digamos, al hidrógeno ya no se refiere a cada átomo de ese elemento, sino al átomo promedio de una cierta mezcla de sus diversos isótopos. Sobre todo en cosmología es muy probable que ocurran tales cambios dramáticos de significado. Los valores de z asignados a los objetos astronómicos más conocidos no variarán apreciablemente en el futuro, pero nadie puede garantizar que dentro de cien años z todavía se interpretará como índice de la expansión del universo. En vista de esto, se podría alegar que el conocimiento científico consiste en esa provisión de valores numéricos definitivos o cumulativamente más precisos, y que el sistema teórico que los enmarca no es más que una herramienta útil para diseñar experimentos y computar sus resultados. Pero esta opción desesperada, muy familiar a los estudiosos de la filosofía de la ciencia, es particularmente inepta en el caso de la cosmología. Aquí los valores numéricos no tienen ninguna aplicación técnica y, por ende, *carecen de toda significación* separados de la teoría. Por la misma índole de su tarea el cosmólogo se ha comprometido, en un grado mayor quizás que otros físicos, a gozar de su ciencia como algo que *se hace* y no como algo que *se tiene*, a encontrar satisfacción en la búsqueda alerta y no en la creencia inerte.

Nota suplementaria: Para explicar cómo la presente inhomogeneidad de la materia —concentrada, como se sabe, en astros, galaxias, cúmulos y supercúmulos de galaxias— se ha generado a partir de la perfecta homogeneidad inicial a que apunta la isotropía de la radiación del trasfondo, se han propuesto varias hipótesis, que introducen variaciones significativas en los modelos cosmológicos —muy idealizados— que he descrito aquí. Ninguna de esas hipótesis ha ganado el asentimiento de una mayoría de los especialistas. El estado actual del debate teórico y las observaciones más recientes en que puede apoyarse se analizan admirablemente en la Parte III del libro de P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology* (1993). Aunque es una obra bastante técnica, el autor comienza cada sección con una presentación sencilla de los conceptos básicos pertinentes, que puede entenderse aun sin haber leído al cabo las secciones anteriores. Las Partes I y II se refieren, respectivamente, al desarrollo de la cosmología del siglo XX y a la Teoría General de la Relatividad. Recomiendo calurosamente la obra de Peebles a cualquiera que desee profundizar en esta materia. Con todo, el lector con pocos conocimientos matemáticos que desee entender la Relatividad einsteiniana haría bien en estudiar primero el libro admirable de Ellis y Williams, *Flat and Curved Space-Times* (1988), que sólo requiere nociones de álgebra y geometría elemental.

3

Una idea feliz

Convencidos como los racionalistas del siglo XVII de que la irracionalidad domina la historia y la razón le escapa, los positivistas del siglo XX distinguían en la ciencia el "contexto de la justificación" del "contexto del descubrimiento", y los mantenían bien separados.[1] Aquél comprendía la organización del pensamiento científico en teorías deductivas consistentes y la confirmación inductiva de (algunos de) sus teoremas. Éste abarcaba los procesos oscuros, a veces inconscientes, por los que el genio científico llega a las ideas matrices en torno a las cuales luego cristalizan esas teorías. El "contexto de la justificación" era propiamente la sede de la racionalidad científica e interesaba al filósofo. El "contexto del descubrimiento" —ilustrado característicamente por la culebrilla que se mordía la cola en el sueño que sugirío a Kekulé la idea del anillo del benceno[2]— era irracional, dominado como estaba por el azar y "el Inconsciente", y había que dejárselo a los psicólogos.

Ahora bien, es innegable que las ideas —buenas y malas—

---

1. Véase, por ejemplo, Reichenbach 1938, pp. 6-7.

2. "Las vías por las que se llega a conjeturas científicas fecundas difieren mucho de cualquier proceso de inferencia sistemática. Por ejemplo, el químico Kekulé nos cuenta que por mucho tiempo había intentado en vano idear una fórmula estructural de la molécula del benceno cuando, una tarde del año 1865, halló una solución del problema mientras dormitaba junto al fuego de su chimenea. En las llamas le parecía ver culebras formadas por átomos danzantes. De súbito, una de las culebras, mordiéndose la cola, formó un anillo y se pusó a girar ante él burlonamente. Kekulé despertó de golpe: había dado con la idea ahora familiar y célebre de representar la estructura molecular del benceno mediante un anillo hexagonal." (Hempel 1966, pp. 15.).

vienen cuando ellas quieren,[3] o cuando tiene a bien insuflárnoslas la Moira o la Musa. Pero el investigador científico a quien se le ocurre de súbito una idea nueva tiene que decidir sobre la marcha si la descarta, o si la conserva y sigue edificando sobre ella al menos por un tiempo. No puede aguardar hasta que los filósofos finalmente se pongan de acuerdo sobre una sintaxis lógica de la inferencia inductiva que, aplicada a los hechos pertinentes, provea el contexto de justificación apropiado para su idea. En verdad, la ocurrencia de nuestro investigador sólo puede convertirse en principio de un descubrimiento si él la incorpora a su reflexión crítica, argumentativa, sobre el problema que tiene entre manos. Qué caprichos de la fantasía intelectual se retienen y elaboran y cuáles se olvidan es algo que se decide, de día en día y aun de minuto en minuto, examinando prestamente cómo calzan en este tejido vivo del pensamiento. Esto es lo único que merece llamarse 'contexto del descubrimiento'. Y es, por supuesto, eminentemente una sede de la razón. De hecho, no hay modo mejor de averiguar qué es lo que debe entenderse por 'racionalidad científica' que dirigir la mirada aquí, a las reflexiones de un investigador científico en acción, e identificar aquello —sea lo que sea— que las guía y coordina en el curso de su trabajo.

Tenemos buenos motivos para desconfiar de las "reconstrucciones racionales" que intentan ajustar este contexto del descubrimiento a alguna idea procrústea de la metodología científica. Pero ¿no hay ninguna esperanza de recuperar el pensamiento pasado, si no *wie es eigentlich gewesen*, por lo menos en una forma que nos resulte persuasiva? Bueno, esperanza habrá mientras nosotros mismos no la abandonemos. Pero tenemos que reunir todo el tacto y el buen juicio de que seamos capaces y aplicarlo a cada vestigio documental: cartas, notas en hojas sueltas, publicaciones tempranas cargadas de errores. Ahora bien, éste ha sido precisamente

---

3. "Ein Gedanke kommt wenn »er« will, und nicht wenn »ich« will" (Nietzsche, *Jenseits von Gut und Böse*, § 17).

el afán de la historia de la filosofía en su propio campo, desde que fue fundada en Alemania en el siglo XIX por Johann Eduard Erdmann, Eduard Zeller, Wilhelm Dilthey, etc.; y no es una casualidad que el fundador de la moderna historia de la ciencia, Alexandre Koyré, haya iniciado su vida académica como historiador de la filosofía.

El período formativo de la Teoría General de la Relatividad atrae especialmente al historiador filósofo debido, sobre todo, a la extraordinaria lucidez de Einstein y su olfato certero para reconocer lo esencial; pero también debido a la duración de su búsqueda, que toma casi nueve años, de suerte que el proceso de invención y descubrimiento, en la medida en que es visible, se exhibe a cámara lenta. Durante ese período, Einstein publicó una docena y media de trabajos sobre la gravedad, incluso dos en colaboración con Grossmann y uno con Fokker. También escribió muchas cartas, cuadernos de notas, etc. John Norton (1984) ha demostrado qué tesoros contienen. Desgraciadamente, están todavía inéditos. Las siguientes observaciones se basan sólo en materiales publicados.

¿Por qué se puso Einstein a buscar una nueva teoría de la gravedad? A fines de 1907 le comunicó a su amigo Habicht que estaba trabajando en la teoría de la relatividad en relación con la ley de gravedad, y que esperaba de este modo dar cuenta de la variación secular en el perihelio de Mercurio, hasta entonces inexplicada.[4] Sin embargo, en 1913 le dijo a la 85ª asamblea de científicos alemanes (*Naturforscherversammlung*) reunida en Viena que la ley de gravedad de

4. Einstein a Habicht, 24 de diciembre de 1907. Citado en Seelig 1957, p. 76 y en Pais 1982, p. 182. Debo a John Norton la referencia a Seelig. El perihelio de Mercurio es el punto de la órbita del planeta que está más cerca del sol. Dicho punto avanza en el firmamento unos 5.600″ (segundos de arco) por siglo. De esta cantidad, 5.025″ representan la "precesión general" debida a que el observador se mueve con la Tierra y 532″ son imputables a la atracción de los otros planetas, conforme a la Ley de Gravedad de Newton. Queda, pues, una precesión de 43″ por siglo inexplicada por la teoría de Newton.

Newton ha demostrado ser "tan exactamente acertada que, desde el punto de vista de la experiencia, no hay ninguna razón decisiva para dudar de su rigurosa validez".[5] Estos testimonios conflictivos podrían conciliarse recordando que en 1913 Einstein creía haber encontrado ya con su amigo Grossmann la teoría que buscaba —el propósito principal de su alocución en Viena era justamente presentarla— y probablemente ya sabía que esta teoría era incapaz de explicar la precesión del perihelio de Mercurio.[6] Por eso —podría decirse— en la alocución de Viena Einstein prefirió olvidar una anomalía que afectaba a su propia teoría no menos que a la de Newton y declaró que ésta era empíricamente impecable, a pesar de que esa anomalía inicialmente había motivado sus investigaciones sobre la gravedad.

Pero este asunto puede abordarse también con un ánimo

Clemence 1947, de quien tomo estos datos, subraya que la "precesión general" es muy difícil de evaluar; mediciones posteriores —citadas por Misner, Thorne y Wheeler 1973, p. 1113— han incrementado su valor en un poco más de 1″ por siglo, lo que es poco comparado con su valor total pero entraña una reducción significativa —casi de un 3%— en la precesión residual.

5. "Die Gesetze der Schwere und der Bewegungen der Himmelskörper [. . .] haben sich als derart exakt zutreffend erwiesen, daß vom Standpunkte der Erfahrung aus kein entscheidender Grund vorliegt, an der strengen Gültigkeit derselben zu zweifeln" (Einstein 1913, p. 1249).

6. En una carta a Sommerfeld del 28 de noviembre de 1915 —en que le anuncia el descubrimiento de las ecuaciones de campo de la Relatividad General— Einstein señala que las ecuaciones de la teoría de Einstein y Grossmann prevén una precesión secular del perihelio de Mercurio de sólo 18″ en vez de los 45″ (*sic*) observados (Einstein y Sommerfeld 1968, pp. 32s.). Conforme a la Relatividad General, si (i) S es un cuerpo esférico con la misma masa que el sol, (ii) m es una partícula de prueba que viaja en el espacio vacío en torno a S, y (iii) la velocidad de m y su distancia a S en un momento dado son iguales a la velocidad de Mercurio y su distancia al Sol, entonces m traza en torno a S una órbita elíptica cuyo periastro avanza aproximadamente 43″ por siglo (cf. la nota 4).

menos mezquino. En un pasaje muy citado de una carta a Max Born escrita en 1952, Einstein dice que "aunque no se conociera ninguna desviación de la luz, ni avance del perihelio, ni desplazamiento de las líneas espectrales, las ecuaciones de la gravitación serían, sin embargo, convincentes, pues evitan el sistema inercial (ese fantasma que actúa sobre todo, sin que las cosas actúen de vuelta sobre él)." Y agrega: "Es notable que los hombres en general sean sordos a los argumentos más poderosos y se inclinen siempre a sobreestimar la precisión de las mediciones."[7]

Einstein escribió estas palabras a los 73 años, y no es posible aducirlas para determinar lo que guiaba su búsqueda en 1907, cuando no tenía más que 28. Con todo, ellas nos permiten entender cómo Einstein pudo abrazar en 1913 una teoría que no satisfacía su anterior expectativa. Y sugieren que cuando Einstein le hablaba a Habicht de una teoría relativista de la gravedad con la que esperaba resolver la anomalía del perihelio de Mercurio, el acento caía en "relativista" y no en "Mercurio". La solución del problema del perihelio era, por cierto, algo que esperaba, pero como beneficio suplementario, que haría más persuasiva a la teoría por venir, mostrando que no era sólo una invención *ad hoc* para allanar la discrepancia entre la vieja mecánica celeste y la nueva electrodinámica de los cuerpos en movimiento.

Que esta última es incompatible con la teoría de la gravedad de Newton ya lo había señalado Poincaré en su memoria "Sur la dynamique de l'électron" (1906).[8] La

---

7. "Wenn überhaupt keine Linienablenkung, keine Perihelbewegung und keine Linien-Verschiebung bekannt wäre, wären die Gravitationsgleichungen doch überzeugend, weil sie das Inertialsystem vermeiden (dies Gespenst, das auf alles wirkt, auf das aber die Dinge nicht zurückwirken). Es ist merkwürdig, daß die Menschen meist taub sind gegenüber die stärksten Argumenten, während sie stets dazu neigen, Meßgenauigkeiten zu überschätzen" (Einstein y Born 1969, p. 258).

electrodinámica relativista requería que "todas las fuerzas y en particular la gravitación sean afectadas por la transformación de Lorentz del mismo modo que las fuerzas electromagnéticas". Por lo tanto, concluía Poincaré, la fuerza de gravedad no puede depender sólo de la distancia entre los cuerpos que interactúan, sino también —como la fuerza de Lorentz[9]— de sus velocidades relativas. Además, su efecto sobre cada cuerpo en un momento dado tiene que calcularse teniendo en cuenta la posición y velocidad de los otros en un momento anterior, "como si la gravitación se hubiera tardado un tiempo en propagarse" (Poincaré 1906, p. 166).

Un intento de reconciliar la física de la gravedad con la electrodinámica de Einstein, basado en la equivalencia de los marcos inerciales y la constancia de la velocidad de la luz, hubiera llevado a una teoría como la formulada más tarde por Whitehead (1922). Pero si atendemos a los primeros pronunciamientos de Einstein sobre la gravedad no encontramos indicios de que haya buscado nunca en esta dirección. Según lo que nos dice en sus notas autobiográficas de 1949, Einstein no perdió el tiempo en un proyecto así, porque pronto se dio cuenta de que por ese camino acabaría negando la igualdad entre masa inerte y masa gravitacional o, en todo caso, no podría dar cuenta de ella "de un modo natural". Esto lo convenció de que "en el marco de la Teoría Especial de la Relatividad no hay sitio para una teoría

---

8. Con respecto a la validez empírica de la teoría de Newton, Poincaré manifiesta en 1906 el mismo optimismo que Einstein en 1913: "Les observations astronomiques ne semblant pas montrer de dérogation sensible à la loi de Newton, nous choisirons la solution qui s'écarte le moins de cette loi, pour de faibles vitesses des deux corps" (Poincaré 1906, p. 167). La anomalía de Mercurio se conocía, por cierto, desde mediados del siglo XIX y ya Leverrier (1811-1877) había intentado explicarla postulando un nuevo planeta entre Mercurio y el Sol.

9. La fuerza de Lorentz es la fuerza que actúa sobre una partícula cargada eléctricamente que se mueve a través de un campo electromagnético.

satisfactoria de la gravitación".[10]

En el mismo año en que Einstein, en aras de una explicación satisfactoria de la gravedad, empezaba a darle la espalda a su primera teoría de la relatividad, el más ilustre converso a esa teoría, el Profesor Max Planck de la Academia de Berlín, en un artículo "Sobre la dinámica de los sistemas en movimiento" (1907), hablando de las "intuiciones y principios utilizados comúnmente como soportes firmísimos en toda suerte de consideraciones teóricas" que la nueva física ha despojado de su pretendida universalidad, citó entre ellos *la igualdad de la masa inerte y la masa gravitacional*. Sabemos que "la radiación térmica en un espacio completamente vacío encerrado entre paredes reflectantes posee ciertamente una masa inercial; pero ¿posee también una masa ponderable? Si, como parece lo más verosímil, esta pregunta tiene que contestarse negativamente, la identidad de masa inerte y masa gravitacional —confirmada hasta ahora por todos los experimentos y admitida por todos— obviamente queda suprimida".[11]

¿Por qué prefirió Einstein mantenerse fiel a la tradicional identidad entre masa inercial y masa gravitacional, hasta el punto de sacrificarle su teoría recién nacida? En las notas autobiográficas recuerda que "por experimentos muy precisos [. . .] se sabía empíricamente con precisión muy grande

---

10. "Es zeigte sich nun, daß im Rahmen des skizzierten Programmes diesem elementaren Sachverhalte überhaupt nicht oder jedenfalls nicht in natürlicher Weise Genüge geleistet werden konnte. Dies gab mir die Überzeugung, daß im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie kein Platz sei für eine befriedigende Theorie der Gravitation" (Einstein 1949, p. 64).

11. "Die Wärmestrahlung in einem vollständig evacuirten, von spiegelnden Wänden begrenzten Raume besitzt sicher träge Masse; aber besitzt sie auch ponderable Masse? Wenn diese Frage zu verneinen ist, was wohl das Nächstliegende sein dürfte, so ist damit offenbar die durch alle bisherige Erfahrungen bestätigte und allgemein angenommene Identität von träger und ponderabler Masse aufgehoben" (Planck 1907, p. 544).

que la masa *pesada* de un cuerpo es exactamente igual a su masa *inerte*".[12] Pero, cabe preguntarse, ¿por qué estaba Einstein tan dispuesto a confiar en este caso en la precisión de las mediciones, y aun a extrapolar sus resultados a todas las circunstancias imaginables? El pasaje recién citado delata con su torpe redacción que —contra lo que ahí se insinúa— el factor decisivo no fue el afán de Einstein en jugar por las reglas de la inducción, como un buen deportista de la ciencia. Pues sabía muy bien que un experimento *muy preciso* puede establecer una igualdad *con gran precisión*, mas no *exactamente*.

Para apreciar mejor lo que estaba en juego, considérese la fuerza newtoniana ejercida sobre una partícula de masa m en el punto $\mathbf{r}$ por una fuente de masa 1 situada en el punto $\mathbf{0}$. La expresan ambos lados de la ecuación siguiente:

$$m(\mathrm{d}^2\mathbf{r}/\mathrm{d}t^2) = -m\mathrm{G}\mathbf{r}/|\mathbf{r}|\mathbf{r}^2 \tag{3.1}$$

donde G es la constante gravitacional. La m en el lado izquierdo representa la inercia de la partícula, esto es, su resistencia a fuerzas impresas; la m del lado derecho denota su carga gravitacional (pasiva) o susceptibilidad a la fuerza impresa gravitacional. ¿Por qué son iguales estas dos cantidades físicas cuyo concepto es tan diferente? En la filosofía natural de Newton la inercia de una partícula está dada por su "cantidad de materia" y los newtonianos de la segunda generación profesaron que la susceptibilidad universal de la materia a la atracción gravitacional también se mide por dicha cantidad.[13] Pero *quantitas materiæ*, una criatura de la teología escolástica,[14] difícilmente podía invocarse en 1907

12. "Aus sehr präzisen Versuchen (insbesondere aus den Eötvös'schen Drehwage-Versuchen) war mit sehr grosser Präzision empirisch bekannt, daß die *schwere* Masse eines Körpers seiner *trägen* Masse genau gleich sei" (Einstein 1949, p. 64).

13. Agradezco a Howard Stein por haberme recordado que Newton mismo nunca admitió que la gravedad fuera una propiedad intrínseca

como fundamento de la igualdad registrada en la ecuación (3.1). Ésta tenía, pues, que parecer una extraordinaria coincidencia. La igualdad está confirmada, sin duda, por la idéntica aceleración que experimentan en nuestro ámbito terrestre todos los cuerpos en caída libre, cualquiera que sea su composición. Pero ¿se mantendrán iguales esas aceleraciones en un campo gravitacional mucho más intenso? ¿no podría ser que la inercia y la carga gravitacional sólo fuesen prácticamente iguales en el caso límite en que el campo es débil y las velocidades en juego son bajas? ¿por qué no se atuvo a esta alternativa para salvar la Relatividad Especial? Al fin y al cabo, Einstein nunca le tuvo miedo a emitir pagarés que ningún banco de datos estaba en condiciones de avalar.

La última pregunta presupone que Einstein, a la sazón, todavía pensaba que la Relatividad Especial merecía salvarse. Pero ¿sabemos acaso que era así? ¿que la teoría no le parecía ya demasiado poco relativista para jugarse por ella? Más

---

de la materia. Comentando su tercera *regula philosophandi* escribe: "Attamen gravitatem corporibus essentialem esse minime affirmo. Per vim insita intelligo solam vim inertiæ" (Newton, *Principia*, p. 555). Newton llegó a una proposición equivalente a nuestra ecuación (3.1) luego de experimentar con cajas de madera del mismo tamaño y forma, colgadas de hilos de la misma longitud y rellenas con pesos iguales de oro, plata, plomo, vidrio, arena, sal, madera, agua y trigo. Observó cómo las cajas, con sus diversos contenidos, oscilaban pendularmente por un largo rato con el mismo período y concluyó que la cantidad de materia (*copia materiæ*) en el oro es a la cantidad de materia en la madera como la acción de la fuerza motriz sobre todo el oro es a la acción de la misma sobre toda la madera, "et sic in cæteris" (p. 572). Extendió a todos los cuerpos en todo el universo este resultado obtenido sobre la Tierra (que, como anotó, era exacto hasta 1 parte en 1.000), en consonancia con su cuarta *regula philosophandi*: "ne argumentum inductionis tollatur per hypotheses".

14. Cf. Anneliese Maier 1966, capítulo 2; véanse en particular las consideraciones de Egidio Romano sobre la física de la eucaristía en la Proposición XLIV de sus *Theoremata de corpore Christi* (1276), citadas por Maier (y parafraseadas en inglés por mí en Torretti 1990, p. 292, n. 64.)

tarde hará valer contra la Relatividad Especial el que ésta retenga el "sistema inercial", esto es, el que reconozca una familia privilegiada de marcos de referencia. Creo que esta consideración tuvo gran importancia para él desde que se aplicó a estudiar la gravedad. Más aún, sospecho que su adhesión inquebrantable a la identidad de masa gravitacional y masa inercial nace de la promesa de supresión final del "sistema inercial" que, a sus ojos, ofrecía la identificación de esas dos cantidades. Mi sospecha encuentra apoyo en tres párrafos de la notas autobiográficas que siguen inmediatamente al último pasaje que cité de ese escrito. La siguiente paráfrasis explica su tenor literal:

(1) "Se me ocurrió (*nun fiel mir ein*)" que la igualdad entre masa inercial y masa gravitacional puede expresarse así: en un laboratorio L en reposo en un campo gravitacional practicamente uniforme de intensidad $\mathbf{g}$ todo aparecerá igual que si ese campo fuese sólo aparente pero el laboratorio mismo estuviera sometido a una aceleración constante $-\mathbf{g}$ relativa a los marcos inerciales.
(2) A la inversa, en un laboratorio L' sometido a una aceleración constante $-\mathbf{g}$ relativa a los marcos inerciales, el comportamiento de los cuerpos puede concebirse como debido a un campo gravitacional "real" (y no sólo aparente) de intensidad uniforme $\mathbf{g}$. Así pues, L' puede considerarse como un "sistema inercial" con el mismo derecho con que calificamos de este modo a un laboratorio terrestre cualquiera (que son todos como L en el párrafo (1)).
(3) Como en la realidad el campo gravitacional sólo se mantiene prácticamente uniforme en espacios pequeños, y su intensidad y dirección varían muchísimo a través de distancias mayores (de aquí a las antípodas, por ejemplo), la idea misma de sistema inercial es vacua. Esto resuelve o —mejor dicho— disuelve el problema de Mach sobre los fundamentos físicos del distingo entre sistemas inerciales y no inerciales.[15]

En un manuscrito inédito de 1920 Einstein se refiere a esta ocurrencia como "la idea más feliz de mi vida (*der glücklichste Gedanke meines Lebens*)".[16] Dice que le vino a la cabeza mientras redactaba el artículo panorámico sobre el Principio de Relatividad que sometió el 4 de diciembre de 1907 al *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, y en efecto está explicada en el § 17 de ese artículo.

Es claro que si los dos tipos de marco de referencia descritos son equivalentes, todos los cuerpos sufrirán la misma aceleración en un campo gravitacional dado, cualquiera que

---

15. Einstein 1949, pp. 64s. En la p. 62 Einstein formula el problema de Mach así: "¿Cómo puede ser que los sistemas inerciales se distingan físicamente de otros sistemas de coordenadas? (*Wie kommt es, daß die Inertialsysteme gegenüber anderen Koordinationssystemen physicalisch ausgezeichnet sind?*)." Para el lector que sepa alemán y quiera comprobar en qué medida mi paráfrasis es fiel, doy aquí el texto original de los párrafos (1), (2) y (3):

> Nun fiel mir ein: Die Tatsache der Gleichheit der trägen und schweren Masse, bezw. die Tatsache der Unabhängigkeit der Fallbeschleunigung von der Natur der fallenden Substanz, läßt sich so ausdrücken: In einem Gravitationsfelde (geringer räumlicher Ausdehnung) verhalten sich die Dinge so wie in einem gravitationsfreien Raume, wenn man in diesem statt eines "Inertialsystems" ein gegen ein solches beschleunigtes Bezugssystem einführt.
>
> Wenn man so das Verhalten der Körper inbezug auf das letztere Bezugssystem als durch ein "wirkliches" (nicht nur scheinbares) Gravitationsfeld bedingt auffaßt, so kann man dieses Bezugssystem mit dem gleichen Rechte als ein "Inertialsystem" betrachten wie das ursprüngliche Bezugssystem.
>
> Wenn man also beliebig ausgedehnte, nicht von vornherein durch räumliche Grenzbedingungen eingeschränkte, Gravitationsfelder als möglich betrachtet, so wird der Begriff des Inertialsystems völlig leer. Der Begriff "Beschleunigung gegenüber dem Raume" verliert dann jede Bedeutung und damit auch das Trägheitsprinzip samt dem Mach'schen Paradoxon.

16. Se trata de un borrador inédito de un artículo para la revista *Nature*. Más adelante cito el pasaje pertinente.

sea su composición respectiva. Además, la pregunta de Planck respecto a la masa gravitacional de la radiación obviamente obtiene entonces una respuesta afirmativa. (Pues, como Einstein repetidas veces señala en escritos posteriores, un rayo de luz describe una trayectoria balística relativamente a las paredes de un ascensor que sube con aceleración constante). Pero, por otra parte, esto implica que *a menos que* la aceleración de gravedad de los cuerpos sea indiferente a su composición *y a menos que* la gravedad curve los rayos de luz, un marco de referencia en reposo en un campo gravitacional uniforme *no es equivalente* a un marco de referencia uniformemente acelerado en un lugar donde no hay gravitación. De modo, pues, que la ocurrencia de Einstein no valía más que la igualdad exacta entre masa inercial y masa gravitacional, que Planck juzgaba desechable. En rigor, tenía *menos* respaldo empírico que ésta, puesto que implicaba una influencia de la gravedad sobre la radiación que no se había observado nunca (y que Planck, como vimos, juzgaba inverosímil). Más aún, Einstein pudo demostrar que si los marcos de referencia en cuestión (L y L' en mi paráfrasis) son de veras equivalentes, los relojes naturales se retrasan al disminuir el potencial gravitacional del lugar donde están situados; una predicción desconcertante para la cual no había a la sazón ni el más leve indicio confirmatorio.[17]

Así pues, cuando Einstein, basándose en la alegada equivalencia de los marcos de referencia *retuvo* la identidad de

---

17. Einstein 1907, § 19. Einstein propuso un experimento para comprobar su predicción: las líneas espectrales de la luz procedente de la superficie del Sol deben producirse a una frecuencia 1,000002 veces mayor que las producidas por átomos de la misma clase en la superficie de la Tierra (Einstein 1907, p. 459). Desgraciadamente, los átomos del Sol están sometidos a trastornos grandísimos. Por eso, antes se logró medir con exactitud el corrimiento de las líneas espectrales predicho por Einstein, aprovechando la pequeñísima diferencia del potencial gravitacional entre la base y el tope de una torre de 22 m en la Universidad de Harvard, que no, como proponía Einstein, la diferencia enorme entre la superficie de la Tierra y la del Sol (cf. Pound y Rebka 1959, 1960; Pound y Snider 1965).

masa inerte y gravitacional en vez de *desecharla* como Planck, estaba simplemente *apostando* a favor de un grupo diferente de predicciones empíricamente injustificadas. ¿Qué lo indujo a preferirlas? La única respuesta plausible a esta pregunta es que Einstein prefirió apostar a que la gravedad curvaba la luz y retardaba los relojes antes que aceptar una discrepancia imperceptible entre la masa inercial y la masa gravitacional, *porque* esas predicciones se deducían de la equivalencia de los marcos de referencia en cuestión, y que Einstein apostaba a dicha equivalencia porque ella significaba el fin de los marcos de referencia privilegiados y de la relatividad restringida. Que éste era el orden de sus razones se ve —me parece— claramente en el tercero de los párrafos que parafraseé arriba. Aquí va una traducción literal:

> Por ende, si uno considera posible que haya campos gravitacionales de cualquier extensión —no restringida de antemano por límites espaciales— el concepto de sistema inercial se torna completamente vacuo. Entonces el concepto de "aceleración relativa al espacio" pierde todo significado y, con él, también el Principio de Inercia y la paradoja de Mach.
>
> (Einstein 1949, p. 67; cité el original en la nota 15)

Estas aseveraciones de Einstein se entienden mejor si invertimos, por así decir, su formulación de la equivalencia de los marcos. Si, como él dice, un marco en reposo en un campo gravitacional uniforme equivale a una marco exento de gravitación pero uniformemente acelerado respecto de los marcos inerciales, entonces *un marco inercial equivale,* a su vez, *a un marco en caída libre en un campo gravitacional uniforme*. De hecho, esta formulación del "principio de equivalencia" de Einstein está más próxima a su ocurrencia original, tal como la describe en 1920:

> Cuando, en 1907, trabajaba en un artículo panorámico sobre

> la Teoría Especial de la Relatividad para el *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, tuve también que tratar de modificar la teoría newtoniana de la gravedad de tal modo que sus leyes concordaran con mi teoría. Los intentos hechos en este sentido mostraban que ello era posible, pero no me satisfacían porque se basaban en hipótesis físicamente infundadas.
>
> Entonces se me ocurrió la idea más feliz de mi vida, en esta forma. El campo gravitacional sólo tiene una realidad relativa, tal como el campo eléctrico generado por inducción magneto-eléctrica. *Porque para un observador que cae libremente desde el techo de una casa no hay*—al menos en su entorno inmediato— *ningún campo gravitacional*. En efecto, si el observador se desprende de algunos objetos, éstos permanecen relativamente a él en estado de reposo o de movimiento uniforme, independientemente de la particular naturaleza química o física (esta consideración ignora, por cierto, la resistencia del aire). El observador tiene derecho, entonces, a interpretar su estado como "en reposo".[18]

En esta versión —como ha mostrado Howard Stein— el principio de equivalencia ya había sido formulado y utilizado con provecho por Newton, aunque éste, distraído por el espejismo del espacio absoluto, no vio todas sus implicaciones.[19] Einstein, en cambio, las comprendió en el acto. Como no hay modo de escapar a la gravitación, es claro que los marcos inerciales sólo pueden existir en la forma de marcos en caída libre. Pero sólo un marco de referencia más bien pequeño puede —por un tiempo corto— caer libremente en un campo gravitacional *uniforme*. Por ende, el principio de equivalencia, combinado con la gravitación ubicua y variable manifiesta en la experiencia, arruina los sistemas inerciales globales que reemplazaron el espacio abso-

---

18. Citado por Pais 1982, p. 178, del manuscrito conservado en la Pierpont Library de Nueva York. No he tenido oportunidad de consultar el original.

19. Newton, *Principia*, Corolario VI a las Leyes del Movimiento y Libro I, Prop. III. Cf. Stein 1977, pp. 14-21.

luto de Newton tanto en la moderna física “clásica”, invariante bajo el grupo de Galileo, como en la Relatividad Especial, invariante bajo el grupo de Poincaré. Pasarían todavía cinco años antes de que Einstein diese con la analogía entre las superficies curvas y los campos gravitacionales no uniformes de la vida real que abrió el camino a su nueva teoría geométrica —o *geometrodinámica*— de la gravitación. Pero la escena ya estaba montada. Pues, en virtud del principio de equivalencia, un sistema inercial sólo podría concebirse como una aproximación local —propiamente, *tangencial*— a la realidad.

La ocurrencia de Einstein cayó del cielo, mas no se quedó ociosa a la espera de datos brutos que la justificaran. Fue, sin duda, un don de la Fortuna: *der glücklichste Gedanke*, “el pensamiento más afortunado”; pero fue un pensamiento y, como tal, asiento y fuente de racionalidad. Desde el primer día operó en la selección y ordenamiento de nuevos pensamientos para la planificación e interpretación de observaciones.

4

Los “principios” de la Relatividad General

En un artículo de 1918 titulado “Cuestiones de principio concernientes a la Teoría General de la Relatividad” (“Prinzipielles zur allgemeinen Relativitätstheorie”), Einstein declara que la teoría de la gravitación presentada por él a la Academia Prusiana en diciembre de 1915 bajo el nombre de Teoría General de la Relatividad[1] descansa sobre tres “puntos de vista principales” *(Hauptgesichtspunkte)*, a saber:

(*a*) **El Principio de Relatividad**: Las leyes de la naturaleza son solamente aseveraciones sobre coincidencias espacio-temporales y por eso hallan su única expresión natural en ecuaciones universalmente covariantes.

(*b*) **El Principio de Equivalencia**: La inercia y la gravedad son esencialmente lo mismo *(sind wesensgleich)*.

(*c*) **El Principio de Mach**: El G-campo [que constituye las propiedades métricas del espacio-tiempo] está determinado a cabalidad *(restlos)* por las masas de los cuerpos.

Este modo de expresarse es análogo al empleado por Einstein trece años antes en su memoria “Sobre la electro-

---

1. Einstein 1915d. La frase ‘teoría general de la relatividad’ traduce literalmente a la expresión alemana usada por Einstein: *allgemeine Relativitätstheorie* (p. 847). La expresión ‘teoría de la relatividad generalizada’, utilizada a veces para designar a esta teoría en nuestro idioma, está más próxima a *verallgemeinerte Relativitätstheorie*, el nombre que Einstein dio a *otra* teoría de la gravitación, propuesta por él en 1913 y abandonada más tarde (Einstein y Grossmann 1913).

dinámica de los cuerpos en movimiento" (1905), en la que sentó las bases de la Teoría Especial de la Relatividad. Las consideraciones expuestas en dicha memoria se apoyan según Einstein en dos principios, que podemos enunciar así:

(I) **El Principio de Relatividad**: Las leyes conforme a las cuales cambian los estados de los sistemas físicos son independientes del particular sistema inercial de coordenadas a que tales cambios de estado están referidos.[2]

(II) **El Principio de la Constancia de la Velocidad de la Luz**: Referida a un sistema inercial, la luz se propaga en el vacío siempre con una velocidad determinada *c*, que no depende del estado de movimiento del cuerpo que la emite.[3]

En la memoria de 1905 Einstein deduce de estos dos principios —suplementados por el principio de inercia implícito en el concepto mismo de sistema inercial a que ellos aluden— la tesis que constituye propiamente el contenido principal de la Relatividad Especial, a saber, que las ecuaciones que expresan las leyes de la naturaleza referidas a un sistema inercial deben ser invariantes bajo las transformaciones del grupo de Poincaré. La analogía verbal con el artículo de 1918 sugiere que los tres principios (*a*), (*b*) y (*c*) desempe-

---

2. Paráfrasis del texto original, en Einstein 1905a, p. 895. La definición de sistema inercial ofrecida por Einstein en ese trabajo —"un sistema de coordenadas en el cual valen las ecuaciones mecánicas newtonianas" (p. 892)— no sirve. Debe preferirse la que dio once años más tarde: un sistema de referencia "relativamente al cual una masa bastante alejada de las demás se mueve uniformemente en línea recta" (Einstein 1916, p. 772).

3. Excepto por las palabras "referida a un sistema inercial", agregadas por mí, y el uso —ahora estándar— de la letra *c* para designar la velocidad de la luz en el vacío, el texto de (II) es una traducción literal de la primera versión que Einstein ofrece de este principio (Einstein 1905a, p. 892; compárese la segunda versión en la p. 895).

ñan un papel similar en la Relatividad General. El contenido esencial de ésta se expresa en las ecuaciones de campo de Einstein y en la ley según la cual la trayectoria espacio-temporal de una partícula material sustraída al influjo de fuerzas no-gravitacionales es una geodésica.[4] Ahora bien, Einstein nunca intentó *deducir* estas proposiciones de la Relatividad General de los principios (*a*), (*b*) y (*c*), al modo como infirió el teorema central de la Relatividad Especial de los principios (I) y (II); y más vale que no lo haya intentado, porque tal deducción es imposible. Los principios de 1918 no tienen pues en la Relatividad General la misma función que tenían los de 1905 en la Relatividad Especial. Y no sería razonable que la tuviesen, pues, como veremos, sólo uno de ellos, el principio (*b*), se asemeja, en cuanto a su sentido y alcance, a los principios (I) y (II). Me propongo examinar aquí la índole y función de los principios propuestos por Einstein en 1918 para la Relatividad General. El tema no sólo interesa por sí mismo, sino, también por la luz que su estudio puede arrojar sobre la naturaleza y variedad de las ideas que, con la dignidad y a menudo también con el nombre de *principios*, inspiran, orientan o justifican las grandes decisiones en la historia de la ciencia.

1

Los principios (I) y (II) que en 1905 sirven de base a la Relatividad Especial pueden considerarse como la expresión, por cierto idealizada, de resultados experimentales. Siempre se entendió que el Principio de Relatividad (I) se inspira directamente en los resultados negativos de los experimentos encaminados a determinar el movimiento de la Tierra a

4. Einstein introdujo inicialmente esta ley como un postulado adicional pero más tarde la derivó de las ecuaciones de campo bajo ciertas condiciones; véase Einstein e Infeld, 1949.

través del éter electromagnético, a pesar de que Einstein ha dicho más tarde que en 1905 el más célebre y preciso de esos experimentos (Michelson y Morley 1887) aún no le había llamado la atención.[5] El carácter empírico del principio (I) queda en evidencia si lo reformulamos así:

(I*) Si x y x' son dos cartas de Lorentz[6] ancladas, respectivamente, en dos sistemas inerciales S y S' y las condiciones iniciales de un experimento físico determinista E referidas al sistema x admiten la misma descripción que las condiciones iniciales de un experimento físico E' referidas al sistema x', la descripción de los resultados de E referidos a x será asimismo idéntica a la descripción de los resultados de E' referidos a x'.

Es claro que (I) implica a (I*). Por lo tanto está en manos de cualquier experimentador ingenioso el refutar a (I) con sólo producir dos experimentos E y E' que satisfagan el antecedente mas no el consecuente de (I*).

El carácter empírico del principio II ha solido cuestionarse por cuanto no tiene sentido atribuir a las señales luminosas una velocidad determinada de propagación en el vacío relativamente a un sistema inercial si antes no se ha definido la coordenada temporal de ese sistema, y el método de definición de tal coordenada propuesto por Einstein en 1905 parece amañado para garantizar el principio II.[7] Dicho método

5. Shankland 1963, pp. 48, 55; cf. sin embargo, Shankland 1973, p. 898.

6. Una *carta de Lorentz* es un sistema espacio-temporal de coordenadas que combina un sistema cartesiano de coordenadas espaciales con la coordenada temporal definida por Einstein (1905, § 1). Para que (I*) valga es indispensable, por cierto, que en la construcción de los sistemas x y x' se utilicen las mismas unidades de medida. Véase el Capítulo 2.

7. La literatura sobre esta materia es enorme. Salmon 1977 contiene una excelente presentación *ad usum philosophorum*.

puede resumirse así: un suceso instantáneo *F* ocurrido en un punto *P* fijo en un sistema inercial *S* ha de tener la misma coordenada temporal (en *S*) que un suceso instantáneo *G* ocurrido en otro punto *Q* fijo en *S*, si y sólo si es físicamente posible que *F* coincida con la reflexión en *P* de una señal luminosa propagada *in vacuo* desde *Q* hasta *P* y desde *P* hasta *Q*, y cuyos instantes de emisión y recepción en *Q* equidistan temporalmente (en *S*) del instante en que ocurre *G*.[8] Es claro que la posibilidad de aplicar sin contradicción a cualquier sistema inercial este método óptico para determinar la coordenada tiempo está lejos de ser evidente a priori. La aseveración de tal posibilidad, implícita en el principio (II), confiere a éste un contenido empírico. (Este asunto se analiza con más precisión en el Capítulo 8).

De los tres principios (*a*), (*b*) y (*c*) de la Relatividad General, sólo el segundo, el Principio de Equivalencia, es comparable en este respecto a los principios (I) y (II) de la Relatividad Especial. Al igual que el Principio de Relatividad (I), el Principio de Equivalencia da expresión al resultado negativo de experimentos de alta precisión e implica, como luego veremos, una consecuencia que lo emparenta con ese principio. El experimento que Einstein tuvo presente en este caso (Eötvös 1889) confirmaba con un margen de error inferior a una parte en cien millones la observación de Galileo de que todos los cuerpos, en un dado lugar de la Tierra, experimentan la misma aceleración de gravedad.[9] Tal

---

8. Lo mismo puede decirse más claramente con los recursos expresivos del álgebra. Sea t la coordenada asignada al suceso *G* leyendo un reloj inmóvil en el punto *Q* donde ocurre *G*. Entonces, al suceso *F* que ocurre en el punto *P* se le asigna la misma coordenada t si y sólo si *F* coincide con la reflexión en *P* de una señal luminosa emitida en *Q* a cierta hora $t - q$ y recibida de vuelta en *Q* a la hora $t + q$.

9. Einstein (1913), p. 1255. Roll, Krotkov y Dicke (1964) compararon la inercia de diversas sustancias y su aceleración gravitacional hacia el sol, confirmando el Principio de Equivalencia con un margen de error inferior a una parte en 10^{11}. Más tarde, Braginsky y Panov

resultado estaba previsto por la dinámica de Newton, que declara proporcional a la "cantidad de materia" propia de cada cuerpo (i) la fuerza (peso) que, a una distancia dada del centro de la Tierra, lo acelera hacia éste, y (ii) la inercia con que el cuerpo resiste a la aceleración. En cambio, es indiferente a la Relatividad Especial, la cual, por una parte, al vincular la inercia a la velocidad. parecería abandonar el concepto clásico de *quantitas materiæ* y, por otra parte, es abiertamente incompatible con la Teoría de la Gravitación de Newton. Precisamente al encarar el problema suscitado por dicha incompatibilidad, Einstein tomó la decisión que se traduce en el Principio de Equivalencia: la nueva teoría relativista de la gravitación, que buscará durante ocho años, debía respetar estrictamente la igualdad de inercia y gravedad, esto es, la proporcionalidad de la masa inercial y la masa gravitacional (pasiva).[10] Aunque Einstein conocía los resultados de Eötvös de 1889, no es verosímil que ellos

(1971; cf. 1972) mejoraron esta precisión a una parte en 10^{12} (véase el análisis fascinante de su método en Braginsky y Manukin 1977). Dicke (1964, p. 168) advierte, eso sí, que debemos distinguir entre un Principio de Equivalencia "débil", corroborado por estos experimentos y el de Eötvös, y el Principio de Equivalencia "fuerte", invocado por Einstein. Según este último, "en un laboratorio en caída libre sin rotación, las leyes físicas locales toman una forma estándar, inclusive un contenido numérico estándar, independiente de la posición del laboratorio en el espacio y el tiempo." El principio "débil", en cambio, asevera tan sólo que "la aceleración de gravedad local es esencialmente independiente de la composición y la estructura de la materia acelerada". El distingo es lícito y puede ser de utilidad para quien, como Dicke, busca abrirle camino a una teoría de la gravitación original. Sin embargo, no se puede negar que los experimentos mencionados corroboran *ambos* principios, aun cuando, como es natural, fortalecen más, proporcionalmente, al "débil" que al "fuerte".

10. Einstein 1911, especialmente pp. 74-76; cf. Einstein (1907), p. 454. La importancia del problema se aprecia mejor si se recuerda que la Teoría de la Gravitación de Newton era a la sazón con mucho la mejor confirmada de las teorías físicas. El primero en señalar su incompatibilidad con la Relatividad Especial fue Poincaré (1906, pp. 166-175).

hayan bastado para motivar esta decisión.[11] Al fin y al cabo, sólo la respaldaban con una precisión de $1{:}10^8$.[12] Determinante ha sido más bien la consideración de la analogía que Einstein ha creído percibir entre el Principio de Relatividad (I) y un obvio corolario de la equivalencia de inercia y gravedad. Éste puede formularse así: Sea L_1 un laboratorio en movimiento uniformemente acelerado con respecto a los sistemas inerciales; sea L_2 un laboratorio en reposo en un campo gravitacional uniforme. Si la aceleración de gravedad determinada por este campo es igual y opuesta a la aceleración uniforme que hemos atribuido a L_1, la estricta proporcionalidad de inercia y gravedad implica que no se puede distinguir mediante experimentos mecánicos entre L_1 y L_2. Einstein (1911) combina el Principio de Equivalencia con el teorema relativista de la inercia de la energía para concluir que también la radiación tiene peso. Einstein funda en ello una generalización del resultado antedicho similar a la generalización de la relatividad clásica en el Principio (I) de

---

11. Einstein y Grossmann (1913, p. 3) mencionan expresamente los resultados de Eötvös; Einstein (1913, p. 1255), dice que el experimento de Eötvös desempeña en el contexto del problema de la relatividad del movimiento acelerado un papel análogo al del experimento de Michelson en la cuestión de la relatividad del movimiento uniforme. Pero Einstein no alude a Eötvös ni en la primera presentación del Principio de Equivalencia (Einstein 1907, pp. 454 ss.) ni en el artículo acerca la influencia de la gravedad sobre la propagación de la luz (Einstein 1911). Años más tarde, Einstein declaró que vino a enterarse de los resultados de Eötvös *después* de adoptar el principio de equivalencia (Einstein 1931, p. 280). En los escritos del período de que estamos hablando, Einstein se refiere sólo a Eötvös 1889 y no al experimento mucho más riguroso y preciso cuyos resultados el sabio húngaro comunicó a la Academia de Budapest en 1909. Estos últimos no se publicaron sino mucho más tarde (Eötvös, Pekár y Fekete 1922), pero no es inverosímil que Einstein los conociera ya en 1910.

12. La teoría relativista de la gravitación de Mie niega la igualdad de la masa inercial y la masa gravitatoria y sin embargo es compatible con los resultados de Eötvös; véanse las observaciones de Mie en Einstein 1913, p. 1265.

la Relatividad Especial: en las condiciones arriba descritas, ningún experimento físico confinado a L_1 y L_2 permitirá distinguir los dos laboratorios. Dicho con otras palabras, que realzarán el paralelismo con el Principio de Relatividad (I): Dado un sistema de coordenadas S_1, en que L_1 reposa, hay un sistema de coordenadas S_2, en que reposa L_2, tal que los resultados de dos experimentos físicos deterministas E_1 y E_2 admitirán descripciones iguales, referidas respectivamente a S_1 y S_2, si sus condiciones iniciales se describen del mismo modo con referencia a los respectivos sistemas. Este corolario del Principio (*b*), al proclamar la equivalencia de un sistema de coordenadas en aceleración uniforme con un sistema de coordenadas en reposo, sugiere la idea de relatividad irrestricta o general que Einstein incorpora al nombre mismo que confiere a su teoría de la gravitación.[13] Sin embargo, sería un error tomar esta sugerencia en serio. Al fin y al cabo, si prescindimos de la tesis de la gravedad de la radiación, el resultado obtenido, como Einstein no deja de subrayar, se deduce de los principios de la dinámica newtoniana.[14] No puede entonces contradecir el distingo

13. La sugerencia es clara en algunos pasajes de Einstein. Así, por ejemplo, en el citado articulo de 1907, p. 454 se pregunta si "cabe pensar que el Principio de Relatividad valga también para sistemas mutuamente acelerados", expone en seguida nuestro corolario al Principio (*b*) en los mismos términos empleados arriba y concluye: "Por esto, en adelante supondremos la cabal equivalencia física del campo gravitatorio y la correspondiente aceleración del sistema de referencia. Esta suposición extiende el Principio de Relatividad al caso del movimiento de traslación uniformemente acelerada del sistema de referencia." Cf. asimismo Einstein 1913, p. 1255.

14. Einstein 1911, p. 725. A continuación inmediata del Corolario V de las Leyes del Movimiento, que proclama la relatividad del movimiento inercial, Newton formula este corolario VI: "Si unos cuerpos que se mueven entre ellos de cualquier modo son urgidos por fuerzas aceleratrices iguales en direcciones paralelas, seguirán moviéndose entre ellos del mismo modo que si no actuasen esas fuerzas" (*Principia*, p. 64). Este Corolario implica, evidentemente, que un sistema de referencia en caída libre sin rotación en un campo gravitatorio homogéneo *no se distingue de un sistema inercial.*

irreductible, característico de esa teoría (y también de la Relatividad Especial), entre sistemas inerciales y no inerciales. En efecto, todo lo que se ha establecido es la perfecta equivalencia física entre el reposo en un campo gravitacional uniforme y la aceleración uniforme con respecto a los sistemas inerciales. Pero de aquí no se infiere nada sobre la relatividad general del movimiento y el reposo. Lo único que tal equivalencia significa es que un sistema en reposo en un campo gravitacional no puede ser inercial y que los sistemas inerciales son sistemas en caída libre en un campo gravitacional uniforme. La consecuencia inmediata de esto es que, como el campo gravitacional que llena el universo conocido está muy lejos de ser uniforme, los sistemas inerciales no existen, excepto localmente y en primera aproximación. Esta consecuencia restringe dramáticamente el alcance de la Relatividad Especial y abre a la vez el camino a la invención admirable de la Relatividad General.

Según Einstein, "el Principio (*b*) constituyó el punto de partida de la teoría entera y fue lo que llevó al establecimiento del Principio (*a*)" (1918, p. 242). Examinemos esta aseveración. Supondremos que el Principio de Equivalencia (*b*) vale con toda la generalidad que implica la tesis de que la luz tiene peso. Daremos por supuesto, además, que la Relatividad Especial vale en toda región espacio-temporal lo bastante pequeña como para que pueda considerársela sumida en un campo gravitacional uniforme. En lo que va corrido del siglo, la física experimental ha corroborado abundantemente esta segunda suposición. Ahora bien, un universo en que la Relatividad Especial vale global, y no sólo localmente puede representarse, como enseñó Minkowski (1909), como una variedad riemanniana cuadridimensional de curvatura cero y tensor métrico de signatura dos. En términos de un sistema de coordenadas ortogonales $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, atado a un marco de referencia inercial y con la coordenada tiempo x^0 definida según el método de Einstein, el elemento lineal d*s* está dado por:

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \qquad (4.1)$$

La trayectoria espacio-temporal de una partícula material libre de la influencia de fuerzas externas satisface las ecuaciones $d^2x^i/ds^2 = 0$ $(0 \leq i \leq 3)$. La misma trayectoria, referida a un sistema de coordenadas curvilíneas $y = (y^0, y^1, y^2, y^3)$ satisface las ecuaciones

$$\frac{d^2y^i}{ds^2} = \sum_{h=0}^{3}\sum_{k=0}^{3} \Gamma^i_{hk}\frac{dy^h}{ds}\frac{dy^k}{ds} \qquad (4.2)$$

donde los coeficientes Γ^i_{hk} son los componentes (con respecto al sistema de coordenadas y) de la conexión lineal determinada por el tensor métrico.

En la variedad representativa del universo de la Relatividad Especial, cualquier sistema de cordenadas ligado a un marco de referencia no inercial es un sistema curvilíneo.[15] Esto vale para un sistema ligado a un marco de referencia uniformemente acelerado respecto a los sistemas inerciales —en cuyo caso el lado derecho de las ecuaciones (4.2) representa las fuerzas inerciales a que aparece sujeta una partícula libre referida a tal sistema— y vale también, conforme al Principio de Equivalencia, para un sistema en reposo en un campo gravitacional uniforme —en cuyo caso, el lado derecho de (4.2) representa la aceleración de gravedad.

Retornemos ahora a la consideración del mundo real, donde, según hemos supuesto, la Relatividad Especial vale al menos localmente. Nuestra suposición impone que nos representemos el mundo como una variedad diferenciable cuadridimensional dotada de alguna suerte de estructura métrica, pero no dice mucho acerca de la índole de ésta. Con todo, la hipótesis más simple compatible con la validez

15. Las curvas paramétricas del sistema —esto es, las líneas a lo largo de las cuales varía una sola coordenada mientras las demás permanecen fijas— no pueden ser rectas todas.

local aproximada de una geometría de curvatura igual a cero consiste en suponer que la métrica global es riemanniana, de la misma signatura que la geometría local (Riemann 1854, pp. 13-15). En tal caso, si g_{ik} denota el campo escalar determinado por la acción de esa métrica sobre los campos vectoriales asociados a la *i*-ésima y la *k*-ésima coordenadas de un sistema cualquiera $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ el elemento lineal está dado por:[16]

$$\mathrm{d}s = \sum_{i=0}^{3} \sum_{k=0}^{3} g_{ik} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_k \tag{4.3}$$

Si adoptamos esta hipótesis, el Principio de Equivalencia conduce derechamente a la conclusión de que una partícula libre del influjo de fuerzas no gravitacionales describe una geodésica espacio-temporal. En efecto, sea σ la cosmolínea (trayectoria espacio-temporal) de una partícula así. En virtud del Principio de Equivalencia, la acción de las fuerzas de inercia (fuerza centrífuga, fuerza de Coriolis, etc.) y del campo gravitacional local sobre nuestra partícula se mide en cada punto de σ por los valores que toman en ese punto los componentes Γ^i_{hk} de la conexión lineal determinada por la métrica (con respecto al sistema de coordenadas elegido). Siempre es posible encontrar un sistema de cordenadas $z = (z^0, z^1, z^2, z^3)$ tal que los componentes de la conexión lineal relativos a z tomen todos el valor cero en cada punto de σ (Fermi 1922, Levi-Cività 1926, O'Raifertaigh 1958). Con respecto a *ese* sistema, los componentes de cualquier aceleración inercial o gravitacional experimentada por la partícu-

16. El campo vectorial asociado a una coordenada es aquél cuyas curvas integrales son las curvas paramétricas de esa coordenada (véase la nota 14). Una métrica riemanniana es un campo tensorial covariante de orden 2 (véase Vocabulario matemático, *s.v.* VARIEDAD DIFERENCIABLE). Las g_{ik} arriba definidas son precisamente los componentes de la métrica con respecto a x.

la se anulan.[17] Como hemos supuesto que sobre ella no actúa ninguna fuerza no-gravitacional, la cosmolínea σ satisface las ecuaciones $d^2z^i/ds^2 = 0$. Como los componentes Γ^i_{hk} relativos a z se anulan sobre σ, estas ecuaciones pueden también escribirse así:

$$\frac{d^2z^i}{ds^2} = \sum_{h=0}^{3}\sum_{k=0}^{3} \Gamma^i_{hk}\frac{dz^h}{ds}\frac{dz^k}{ds} \tag{4.4}$$

Éstas son las ecuaciones de una geodésica en nuestra variedad riemanniana.[18] Los supuestos adoptados implican, por consiguiente, que los fenómenos de la gravitación ponen de manifiesto la estructura geométrica del universo. Tal es, sin duda, la idea central de la Relatividad General, que las ecuaciones de campo no hacen sino articular con precisión. Einstein tiene toda la razón cuando destaca el vínculo que ata el Principio de Equivalencia con esta idea central.[19] Pero es claro que dicho principio por sí solo no basta para fundamentarla.

---

17. Piénsese en un laboratorio espacial en caída libre sin rotación. Si es suficientemente pequeño, no se observará en su interior ningún fenómeno gravitatorio. Ésta fue la "idea feliz" que Einstein tuvo en 1906; véase el Capítulo 2.

18. Hay que tener presente, eso sí, que en la Relatividad General el campo gravitatorio depende de la distribución de la materia. El resultado anterior sólo vale para una "partícula de prueba", esto es, una partícula tan pequeña que su presencia no afecta significativamente dicha distribución.

19. "[El Principio (b)] ciertamente no puede abandonarse mientras se quiera adherir a la idea fundamental del sistema teórico" (Einstein 1918, p. 242). Contrástese la actitud displicente de Synge (1960, pp. IXs.). Los tratados de Weinberg (1972) y Papapetrou (1974) justiprecian mejor el sentido y la importancia del Principio de Equivalencia. Véase asímismo el estudio histórico-crítico de Norton (1989).

2

Tampoco lleva inequívocamente “al establecimiento del Principio (*a*)”, como sostiene Einstein (1918, p. 242; citado arriba); aunque a la luz del análisis que sigue a la cita anterior de este pasaje, es verosímil que su adopción haya sido *sugerida* por el Principio de Equivalencia. El Principio (*a*), que Einstein (1918) llama Principio de Relatividad, es, como el lector habrá observado, un principio puramente metodológico, que prescribe la forma matemática que deben revestir las leyes naturales. El Principio prescribe que las expresemos como ecuaciones *universalmente* covariantes, esto es, como ecuaciones que se preservan —en vez de trocarse en desigualdades— cuando se aplica a sus dos miembros la misma transformación arbitraria de coordenadas.[20] Tal prescripción sólo tiene sentido si el universo se representa como una variedad diferenciable, pues de otro modo no cabe hablar de transformaciones de coordenadas (véase el Capítulo 2). Entonces, el Principio (*a*) se cumple automáticamente si las realidades físicas que las leyes naturales ponen en relación se representan mediante objetos geométricos definidos en dicha variedad.[21]

Si la variedad tiene una estructura afín (determinada, en una variedad riemanniana, por la conexión lineal compatible

---

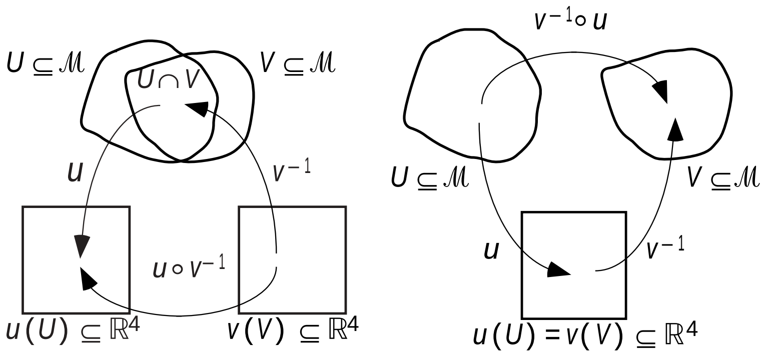
20. Mario Bunge lo llama por eso Principio de Covariancia General. Véase la excelente exposición crítica en Bunge 1967, pp. 213-18.

21. Ejemplos de objetos geométricos son los campos de escalares, vectores, tensores y espinores que aparecen en los tratados de Relatividad General. Schouten y van Kampen introdujeron el término ‘objeto geométrico’ en lugar del término ‘invariante’ empleado anteriormente, por cuanto “los sistemas de ese género que se presentan en las investigaciones de geometría diferencial siempre tienen una significación geométrica independiente del sistema de referencia” (1930, p. 758, n 2). El nuevo término ganó difusión al ser adoptado en la influyente monografía de Veblen y Whitehead (1932, p. 46).

con la métrica), este método de representación pone a disposición del físico los poderosos recursos del cálculo diferencial absoluto desarrollado por Ricci y Levi-Cività (1901). Familiarizados como estamos con este enfoque por Einstein y su Relatividad General, el Principio (*a*) nos parece hoy por hoy la única norma razonable para la formulación de las leyes naturales por una física que ordena los fenómenos en el espacio y el tiempo. La igualdad de dos realidades físicas no puede depender del sistema de coordenadas elegido para describirlas. Cualquier igualdad que desaparezca al sustituirse un tal sistema por otro no pasa de ser una ilusión alimentada por el método convencional de descripción elegido. Es claro que, aunque los resultados de un experimento pueden hacer aconsejable el abandono de una teoría determinada que se ajuste al Principio (*a*), ninguna observación compatible con la representación del universo mediante una variedad diferenciable puede entrar en conflicto con el principio mismo. En este sentido, el Principio de Relatividad (*a*) de la Relatividad General no es un principio empírico y no puede entenderse como una generalización del Principio de Relatividad (I) de la Relatividad Especial, que sí lo es. Esto puede confirmarse desde otro punto de vista si consideramos al Principio (I) en su versión (I★) e intentamos generalizarlo. Como se recordará, (I★) dice que, si x y x' son dos cartas de Lorentz y E y E' son dos experimentos deterministas cuyas condiciones iniciales referidas, respectivamente, a x y x' se describen de la misma manera, también coincidirán las descripciones del desarrollo y desenlace de E y E' referidas, respectivamente, a esos dos sistemas. La generalización de este principio a cualquier par u y v de sistemas de coordenadas *arbitrarias* es por cierto imposible y no puede ser el propósito del Principio (*a*), aunque Einstein le asigne en 1918, como ingrediente de la Relatividad General, el mismo nombre que le había dado en 1905 al Principio (I), en la primera presentación de la Relatividad Especial.

Para poner de manifiesto que tal generalización es imposible recordemos que una carta (sistema de coordenadas) es una aplicación biyectiva del espacio-tiempo o de una parte del mismo en un abierto de $\mathbb{R}^4$. Sean u y v dos sistemas tales, definidos, respectivamente, en las regiones U y V del espacio-tiempo $\mathcal{M}$. Sólo si la intersección $U \cap V \neq \varnothing$ tiene sentido hablar de la transformación de coordenadas $v \bullet u^{-1}$ y de su inversa $u \bullet v^{-1}$, que lleven de un sistema al otro (véase la fig. 5). Pero sólo habrá experimentos deterministas E_u y E_v cuyas condiciones iniciales, referidas respectivamente a u y a v, se describan de la misma manera, si existe la aplicación compuesta $v^{-1} \bullet u$ de U —o por lo menos de una subregión de U— en V y esto requiere que el alcance de u tenga una parte no vacía en común con el alcance de v (de otro modo, no podrían figurar las mismas coordenadas numéricas en la descripción de las condiciones iniciales de E_u y E_v). Supongamos cumplido este requisito. Es claro que las descripciones del desarrollo ulterior de E_u y E_v, referidas respectivamente a u y v, sólo pueden ser identicas si se cumplen dos requisitos más: (i) que la región de $\mathbb{R}^4$ en que

Fig. 5



La figura de la izquierda ilustra la transformación de coordenadas (o transformación "pasiva") u • v^{-1}. La figura de la derecha ilustra la transformación puntual (o transformación "activa") v^{-1} • u.

u aplica el desarrollo de E_u esté íntegramente incluida en el alcance de v (de otro modo, en la descripción de E_u referida a u figurarían coordenadas numéricas que no podrían figurar en una descripción de E_v referida a v); (ii) que la aplicación $v^{-1} \bullet u$ sea una isometría (de otro modo se podrían diseñar experimentos sencillísimos cuyas descripciones relativas a u y a v resultarían divergentes aunque de hecho los experimentos mismos fuesen geocronométricamente iguales: vgr. la duplicación en condiciones físicas equivalentes de una misma jugada de billar). Podemos suponer que el sistema v puede siempre extenderse de modo que se cumpla el requisito (i) y limitarnos a considerar pares de sistemas que lo satisfagan.[22] Pero es evidente que la condición (ii) no puede ser satisfecha por *cualquier* par de sistemas de coordenadas que satisfaga la condición (i). Es más, la condición (ii) no será satisfecha por ningún par de coordenadas en una variedad riemanniana típica, de curvatura variable, pues tales variedades no admiten por regla general *ninguna* isometría (excepto la identidad). El Principio (I) de la Relatividad Especial difiere pues esencialmente del Principio (*a*) de la Relatividad General, y llamarlos de la misma manera, como hace Einstein, sólo puede ser fuente de confusión.[23]

Einstein se demoró algún tiempo en llegar a la interpretación correcta del Principio (*a*). En la monografía que escribió con Grossman en 1913 todavía lo presenta como un *desideratum,* que no es seguro que la naturaleza misma de las cosas permita realizar.[24] El mismo año, en Viena, en una

---

22. En particular, los sistemas lorentzianos de que habla el Principio (I*) pueden siempre considerarse como aplicaciones biyectivas del espacio-tiempo *entero* sobre $\mathbb{R}^4$.

23. El físico ruso V. A. Fock fue, por lo que sé, el primero en llamar la atención sobre este asunto, subrayando que la Relatividad General, por la razón arriba señalada, era todo lo contrario de una “teoría de la relatividad” en la acepción tradicional de la palabra (1957, p. 326; cf. Fock 1959, p. xvii).

24. Einstein y Grossmann 1913, p. 18. De hecho las ecuaciones del

alocución ante la 85ª asamblea de científicos alemanes, les comunica que acaba de descubrir una prueba de que dicho *desideratum* es efectivamente irrealizable, al menos en el caso de una teoría de la gravitación.[25] Esta ocurrencia retardó en dos años el descubrimiento de las ecuaciones de campo de la Relatividad General. En la clásica exposición de la teoría (Einstein 1916), el Principio (*a*) se ofrece como el antídoto contra un "defecto epistemológico" *(erkenntnistheoretischer Mangel)* que vicia a la Relatividad Especial no menos que a la mecánica clásica, y que habría sido descubierto por Mach. Einstein lo ilustra con el siguiente ejemplo: Sean K_1 y K_2 dos cuerpos fluidos de la misma naturaleza y tamaño, situados muy lejos el uno del otro y del resto de la materia. No se observan movimientos relativos de las partes de cada cuerpo ni varía la distancia entre ambos; pero un observador inmóvil en cualquiera de ellos ve rotar al otro en torno a la recta que une sus centros de gravedad. Ahora bien: K_1 es una esfera y K_2 un elipsoide. ¿Cómo entender esta diferencia en una situación al parecer completamente simétrica? Einstein declara que la respuesta a esta pregunta sólo puede considerarse "epistemológicamente satisfactoria" si la causa propuesta es "*un hecho observable de la experiencia*", pues "la

---

campo gravitacional propuestas por Einstein y Grossmann no satisfacen las exigencias del Principio (*a*). Por otra parte, logran representar de modo generalmente covariante el equilibrio energético entre el campo gravitatorio y un proceso físico cualquiera (p. 10, ecuación (10); cf. pp. 11, 18). De ahí que saquen esta sorprendente moraleja: "Parece natural suponer que todos los sistemas de ecuaciones físicas *excepto las ecuaciones de la gravitación* (*mit Auschluß der Gravitationsgleichungen*) deben formularse de tal modo que sean covariantes bajo transformaciones arbitrarias de las coordenadas" (p. 18, cursiva mía).

25. "En los últimos días hallé la prueba de que una tal solución universalmente covariante no puede existir" (Einstein 1913, p. 1257 n. 2). Se trata sin duda del célebre "argumento del agujero" explicado en Einstein 1914, p. 1067. Al respecto pueden ahora consultarse los interesantísimos trabajos de Stachel (1989), Earman y Norton (1987) y Stachel (1992).

ley de causalidad sólo constituye una proposición acerca del mundo de la experiencia si en último término figuran como causas y efectos solamente *hechos observables*" (1916, p. 771; cursiva de Einstein). Newton habría pecado contra este principio al atribuir la forma elipsoidal de K_2 a su rotación en el inobservable espacio absoluto. Según Einstein la diferencia entre K_1 y K_2 sólo puede explicarse legítimamente atribuyéndola la acción de los demás cuerpos, por alejados que estén. Esta idea de una "acción de las masas lejanas" es, como veremos luego, el antecedente directo del Principio de Mach (*c*). Pero Einstein, después de formularla, pasa inmediatamente a formular el Principio (*a*), en estos términos:

> Entre todos los espacios concebibles R_1, R_2, etc. que se mueven unos con respecto a otros de cualquier manera, no se puede considerar a ninguno como privilegiado a priori, si no se quiere resucitar la objeción epistemológica indicada. Las *leyes de la física tienen que estar constituidas de tal modo que valgan con respecto a sistemas de referencia que se muevan de cualquier manera.* Por esta vía llegamos, pues, a una ampliación del Postulado de la Relatividad.
>
> (Einstein 1916, p. 772)

No cabe duda de que Einstein entiende precisar esta idea cuando postula, algunas páginas más adelante, que

> *las leyes generales de la naturaleza deben expresarse mediante ecuaciones que valgan para todos los sistemas de coordenadas, esto es, que sean covariantes bajo transformaciones arbitrarias (generalmente covariantes).*
>
> (Einstein 1916, p. 776)[26]

---

26. Éste es precisamente el Principio (*a*) de Einstein 1918. El nombre de "Principio de Relatividad" que le dio allí se explica a la luz de lo dicho inmediatamente después del texto arriba citado: "Es claro que una física que satisface este postulado se ajusta al postulado general de la relatividad (*allgemeine Relativitätspostulat*). Pues entre *todas* las transformaciones se encuentran también en todo caso las correspondientes a todos los movimientos relativos de los sistemas de coordenadas (tridimensionales)" (1916, p. 776).

Einstein dice que esta exigencia de covariancia general "priva al espacio y al tiempo del último resto de objetividad física", una observación sorprendente, puesto que la noción misma de sistemas arbitrarios de coordenadas presupone la objetividad de la variedad diferenciable en que están definidos.[27] La exigencia misma se fundamenta así:

> Todas nuestras constataciones espacio-temporales se reducen en último término a la determinación de coincidencias espacio-temporales; [. . .] la introducción de un sistema de referencia no sirve sino para facilitar la descripción del conjunto de tales coincidencias [. . .]. Como todas nuestras experiencias físicas en último término se dejan reducir a tales coincidencias, no hay por de pronto (*zunächst*) ninguna razón para preferir ciertos sistemas de coordenadas a otros, en otras palabras, llegamos a la exigencia de covariancia general.
>
> (Einstein 1916, pp. 776, 777)

Einstein hizo bien en decir que no había tal razón *por de pronto.* Porque es evidente que, según cual sea la estructura que de hecho convenga atribuir a la variedad riemanniana representativa del universo, habrá en ella o no sistemas de coordenadas privilegiadas. Por ejemplo, si el espacio-tiempo fuese plano, la preferencia por los sistemas ortogonales tendría un *fundamentum in re.* En los universos homogéneos postulados como primera aproximación por la cosmología relativista tienen preferencia los sistemas de coordenadas en que el elemento lineal toma la forma llamada de Robertson y Walker.[28]

---

27. Podría entenderse que la observación citada significa que la exigencia de covariancia general acaba con la objetividad física del espacio y el tiempo *separados,* sin afectar la objetividad física de la variedad diferenciable cuadrimensional que forman *unidos.* Pero un pasaje de las conferencias de Princeton de 1923 (Einstein 1956, pp. 55s.) me hace pensar que no era eso lo que Einstein quiso decir.

28. Sobre tales universos homogéneos véase, por ejemplo, Ryan y Shepley 1975. Los sistemas de Robertson y Walker usan coordenadas

Erich Kretschmann (1917) parece haber sido el primero en señalar que el Principio de Relatividad (*a*), del que Einstein hace depender su Relatividad General, es una norma de procedimiento que no excluye ninguna hipótesis física sustantiva y por lo tanto no puede ser una consideración decisiva para adoptar una teoría determinada. Dice Kretschmann que si reconocemos, con Einstein, que "todas las observaciones físicas en último término consisten en la comprobación de relaciones puramente topológicas ('coincidencias') entre objetos perceptuales espacio-temporales" y que ellas "no privilegian a ningún sistema de coordenadas" en particular, tenemos que concluir que "cualquier teoría física, sin modificar su contenido controlable mediante observaciones, se puede poner en armonía" con el Principio (*a*) "mediante una transformación puramente matemática de las ecuaciones que la expresan, la cual ofrecerá a lo sumo dificultades matemáticas" (1917, p. 576).[29] Einstein (1918) responde directamente a Kretschmann. Reconoce que Kretschmann tiene razón en el pasaje citado. Pero agrega que esto no disminuye el valor heurístico del Principio (*a*) cuando se trata de elegir entre dos teorías físicas.

> Aunque es verdad que toda ley empírica tiene que dejarse expresar en forma generalmente covariante, el Principio (*a*) posee sin embargo una fuerza heurística significativa, que ya

---

espaciales *polares*, definidas de modo que cada partícula del fluido cósmico homogéneo conserve siempre las mismas (coordenadas "comóviles") y así su cosmolínea sea una curva paramétrica de la coordenada temporal (estas curvas paramétricas son ortogonales a las hipersuperficies con coordenada temporal constante o "hipersuperficies de simultaneidad").

29. Kretschmann propone en este artículo un Principio de Relatividad diferente, conforme al cual la Relatividad General es una "teoría absolutista perfecta" y, en cambio, la Relatividad Especial resulta ser, bajo ciertos supuestos generales, la más amplia teoría relativista concebible. Lamentablemente, la formulación del Principio de Relatividad de Kretschmann (p. 584) está lejos de ser perspicua.

> se ha puesto a prueba brillantemente en el problema de la gravitación y que se basa en lo siguiente: *Entre dos sistemas teóricos compatibles con la experiencia debe preferirse aquél que resulte más simple y más transparente desde el punto de vista del cálculo diferencial absoluto.* Hágase la prueba de expresar la mecánica newtoniana de la gravitación en la forma de ecuaciones absolutamente covariantes (en cuatro dimensiones) y uno se convencerá seguramente de que el Principio (*a*) excluye a esta teoría, no por cierto desde un punto de vista teórico, pero sí desde un punto de vista práctico.
>
> (Einstein 1918, p. 242)

Las formulaciones covariantes de la Teoría de la Gravitación de Newton propuestas por Élie Cartan (1923, 1924) y K. Friedrichs (1927) dieron al traste con la expectativa que Einstein tenía por tan segura.[30] No son esencialmente menos simples y sí, diría yo, "más transparentes" que la versión original de Newton, por cuanto en ellas desaparece un enigma que enturbia a ésta, a saber, que se pueda hablar de una aceleración absoluta y no de una velocidad absoluta. Con todo, estas formulaciones covariantes de la teoría newtoniana hacen resaltar lo arbitrario de la separación entre espacio y tiempo inherente a esta teoría. Además, no parece verosímil que hubieran podido ocurrírsele a nadie antes de que Einstein diese con la Relatividad General.

Antes de dar por concluido este examen del "Principio de Relatividad" de la Relatividad General debo aludir brevemente a su reinterpretación por el físico norteamericano J. L. Anderson. Según él, las tres teorías clásicas del espaciotiempo, la Teoría de la Gravitación de Newton, la Relatividad Especial y la Relatividad General, tienen cada una un "Principio de Relatividad". Este proclama la invariancia de las

---

30. Véase también Havas 1964 y Trautman 1965. Sobre la formulación covariante de la TNG en cuatro dimensiones pueden consultarse, además de los artículos citados, el de los filósofos Earman y Friedman (1973), así como el capítulo "Newtonian Physics" del libro de Friedman (1983).

leyes naturales respecto de un cierto grupo de automorfismos del espaciotiempo. En el caso de la Relatividad General dicho grupo no es otro que el grupo de todos los difeomorfismos del espacio-tiempo sobre sí mismo (esto es, todas las aplicaciones biyectivas del espacio-tiempo sobre sí mismo que preservan su estructura de variedad diferenciable). Como cualquier grupo más amplio desnaturalizaría el espacio-tiempo mismo, la Relatividad General hace justicia a su nombre, ya que no es dable concebir un principio de relatividad más general. Para determinar el grupo característico de las otras dos teorías Anderson las considera en una versión covariante. Los objetos geométricos de que habla cada una deben clasificarse, según él, en "dinámicos" y "absolutos". Los objetos absolutos contribuyen a determinar los otros objetos de la teoría pero no son a su vez determinados por ellos. El grupo característico de una teoría es el grupo de las simetrías de sus objetos absolutos. Como la Relatividad General no tiene objetos absolutos, su grupo característico resulta ser, trivialmente, el más general de todos; *todo* objeto absoluto de la Relatividad General es preservado por los difeomorfismos del espacio-tiempo, por la sencilla razón de que no hay *ningún* objeto así. En la interpretación de Anderson, el Principio de Relatividad de la Relatividad General aparece estrechamente emparentado con las motivaciones que inspiran el Principio de Mach. Me parece, eso sí, que la interpretación de Anderson no tiene asidero en los textos de Einstein.[31]

---

31. Sobre el distingo entre objetos "absolutos" y "dinámicos", véase Anderson 1964, 1967; Friedman 1973, 1983; Hiskes 1984; Torretti 1984, pp. 284-86.

3

El Principio (*c*) se llama Principio de Mach porque, según Einstein, constituye una generalización de la demanda —formulada por Ernst Mach en su crítica a Newton— de que la inercia de los cuerpos materiales se explique por su acción recíproca.[32] Einstein (1918, p. 211, n.1) confiesa no haber distinguido claramente hasta entonces entre el Principio de Relatividad (*a*) y el Principio de Mach (*c*). Como en ese mismo escrito admite por primera vez que el Principio (*a*) es un principio puramente metodológico que no dice nada sobre la realidad física, es de suponer que el contenido sustantivo de la idea de relatividad general, ligado hasta entonces al Principio (*a*), está ahora expresado por el Principio (*c*). Por eso vale mucho la pena tomar conciencia de la verdadera índole del Principio de Mach (*c*) y de lo que lo distingue del Principio de Equivalencia (*b*). He afirmado que este último es un principio empírico. No puedo decir lo mismo del Principio de Mach. Para prevenir malentendidos conviene aclarar en qué sentido utilizo aquí la palabra 'empírico'. No pretendo que el Principio de Equivalencia pueda

---

32. Cf. Mach, *Mechanik*, pp. 222 ss. En la mecánica clásica se pueden distinguir dos aspectos de la inercia de un cuerpo: (*a*) la trayectoria inercial que el cuerpo sigue si no actúan sobre él fuerzas externas y que es útil representarse como una curva espacio-temporal; (*b*) la masa inerte, una constante característica del cuerpo, que mide su resistencia a tales fuerzas externas. La exigencia de Mach puede entenderse como un programa para explicar la forma de las trayectorias (*a*) por la distribución de las masas (*b*). Así me parece que la entiende Strauss 1968, pp. 266 ss. Pero Mach decía que las masas mismas son relativas (*Mechanik*, p. 222). Este pasaje justifica, a mi modo de ver, la interpretación de Einstein, según la cual, de acuerdo con las ideas de Mach, la propia masa inerte de una partícula de prueba varía con la distribución de la materia circundante. Cf. Einstein y Grossmann 1913, p. 6; Einstein 1913, p. 1261; 1956, p. 100; Strauss 1968, p. 276.

contrastarse lisa y llanamente con los hechos observables al modo de una aseveración particular (vgr. que hay siete naranjas sobre mi escritorio) o un simple resumen de tales aseveraciones (vgr. que la temperatura media anual en Sevilla es de 22° C). El Principio de Equivalencia, al igual que cualquier otra hipótesis científica del mismo orden de generalidad, puede encastillarse en un sistema teórico apropiado para resistir los embates de una experiencia adversa. Es claro, sin embargo, que el Principio de Equivalencia ha sido sugerido por las observaciones mencionadas en el § 1, que extrapola en forma muy audaz pero legítima. Es claro además que ciertos resultados experimentales, nítidos y bien confirmados, constituirían, a ojos de la comunidad científica de hoy, motivo suficiente para rechazar el Principio, aunque se pudiera defenderlo con suposiciones *ad hoc*. Tal ocurriría, por ejemplo, si el experimento de Braginsky y Panov (véase la nota 9), repetido en la superficie de Mercurio, revelase una diferencia significativa, explicable sólo por la mayor cercanía del sol, entre la atracción solar sobre el oro y sobre el aluminio. Como puede verse, lo que se llame "empirico", en la acepción que aquí tiene este vocablo, depende estrechamente de la tradición y la práctica efectiva de la ciencia. Ello puede dificilmente sorprendernos, pues la experiencia (*ἐμπειρία*) a que la palabra se refiere no es una idea platónica, alojada en algun lugar supraceleste, sino que es la hechura histórica de esa tradición y de esa práctica. Ahora bien, ni la exigencia original de Mach de explicar el origen de la inercia por la interacción de la materia, ni la versión más precisa y general que Einstein dice ofrecer de la misma idea han sido sugeridas por observación alguna. Son ciertas consideraciones muy generales, de orden gnoseológico o metafisico, acerca de los requisitos que debe cumplir una explicación científica admisible, las que mueven a Mach a rechazar la concepción newtoniana de la inercia, ligada a su idea del espacio absoluto, y a proponer como alternativa la tesis de que la inercia es producto de la acción a distancia de las grandes masas del universo; una tesis según la cual, por ejemplo, el chofer que da con la cabeza en el parabrisas de su automóvil cuanto éste choca con otro es víctima de la acción de las estrellas.[33] Aunque las razones que lo respaldan, tanto en el pensamiento de Mach como en el de Einstein, justifican que lo caractericemos como un principio filosófico o, más precisamente, metafísico, no pretendo afirmar que el Principio de Mach carezca absolutamente de consecuencias observables. Si aceptamos la Relatividad General, la comprobación de que la densidad media de la materia en el universo es algo mayor de lo establecido hasta ahora (mayor, digamos, que 2×10^{-29} g/cm^3) permitiría concluir, a la luz de las demás observaciones conocidas, que el universo es espacialmente finito. Para algunos autores, tal conclusión sería un índice claro de la validez del Principio de Mach.[34] Conviene tener presente, empero, que este u otros hechos observables que se han propuesto como corroboraciones del Principio sólo pueden inferirse de él si se lo suplementa con teorías como la Relatividad General o la teoría de Brans y Dicke (1961), que fueron inspiradas por él. Cuando Einstein lo adoptó como guía para el desarrollo

33. Mach escribe: "Sobre el espacio absoluto y el movimiento absoluto nadie puede decir nada; son meros entes de razón *(Gedankendinge),* que no pueden exhibirse en la experiencia. Todos nuestros principios de la mecánica son, como se ha mostrado en detalle, experiencias sobre posiciones y movimientos *relativos* de los cuerpos. No hubiera sido posible ni lícito aceptarlos sin corroboración en los dominios en que ahora se los considera válidos. Nadie tiene derecho a extender esos principios más allá de los límites de la experiencia. Más aún, tal extensión no tiene sentido, pues nadie sabría aplicarlos" (*Mechanik*, p. 222).

34. Hönl 1966, pp. 31s. Woodward y Yourgrau 1972, p. 111, sostienen que el Principio de Mach puede considerarse "empíricamente verificado" si el marco de referencia definido por las estrellas fijas es el mismo con respecto al cual la radiación térmica del trasfondo descubierta por Penzias y Wilson (1965) aparece como perfectamente isotrópica.

de la Relatividad General nada permitía barruntar qué clase de hechos podrían aducirse eventualmente para corroborarlo. Por eso, el Principio de Mach, en cuanto sirve de base o al menos de motivación para la Relatividad General, no puede considerarse como un principio empírico.[35]

El lector ha oído hablar, seguramente, del experimento del cubo de agua, mediante el cual Newton pretendía exhibir la realidad del espacio absoluto. Cuando el cubo empieza a girar, la superficie del agua, todavía en reposo absoluto, pero por lo mismo en rotación relativa a las paredes del cubo, conserva su forma plana; pero al cabo de un tiempo, cuando el movimiento del cubo acaba de trasmitirse al agua de modo que ella está en reposo con respecto a aquél, la superficie toma una forma cóncava, indicio claro de que el agua está ahora comprometida en un movimiento de rotación absoluta (Newton, *Principia,* p. 51). Mach no se deja convencer por esta prueba de la presencia física del espacio. No es el primer pensador que ha juzgado inadmisible la hipótesis de la existencia de un espacio independiente de los cuerpos inmersos en él. Pero mientras otros, como Leibniz y Kant,[36] estimaban quimérico el pretendido modo de ser del espacio, Mach objetó sobre todo a la atribución de realidad física a un ente inobservable.[37] Los métodos de

---

35. Creo que el Principio de Mach, por su índole y su función, cae de lleno entre los que Gerald Holton llama ingredientes *temáticos* de la ciencia, distinguiéndolos de los ingredientes *fenoménicos* (entre los cuales me parece que debe contarse el Principio de Equivalencia) y los ingredientes *analíticos* (entre los que probablemente habría que incluir el Principio de Relatividad (*a*) o Principio de Covariancia General). Las tres clases de ingredientes, según Holton, son proposiciones o conceptos. Más aún, una misma noción o hipótesis científica puede analizarse en "componentes" de las tres clases. Véase Holton 1973, pp. 21ss., 47 ss.

36. Leibniz 1717, Mr. Leibnitz's Third Paper, § 5; Fourth Paper, §§ 1-18. Kant 1781, pp. 39, 490, 507.

37. Cf. el pasaje citado en la nota 33. La crítica de Mach fue anticipada en el siglo XVIII por Berkeley (1710, §§ 110-117; 1721, §§ 52 y ss.).

observación indirecta que ilustra el experimento del cubo de agua no le parecen concluyentes. Al fin y al cabo, todo lo que en dicho experimento se observa es que la superficie del agua, inalterada mientras el agua se mueve respecto al cubo, se deforma en cuanto ella empieza a rotar relativamente a las estrellas fijas. Habría que ver si no se observa lo mismo con el agua girando en un cubo de plomo con paredes de una legua de espesor.[38]

El rechazo del espacio absoluto por razones metafísicas o epistemológicas tiene bastante importancia en el pensamiento relativista de fines del siglo XIX. Poincaré, que no se cansa de repetir que ningún experimento fisico puede revelar nada acerca del espacio absoluto, pues sólo pueden observarse relaciones entre cuerpos, propone el siguiente "Principio de Relatividad":

> Las lecturas que podamos hacer en nuestros instrumentos en un instante dado dependerán únicamente de las lecturas que hubiéramos podido hacer en los mismos instrumentos en el instante inicial.
>
> (Poincaré, SH, p. 99)

Einstein reiteradamente asocia su propio relativismo, especialmente en el paso de la Relatividad Especial a la Relatividad General, a la influencia del pensamiento de Mach. En las páginas que le dedica con motivo de su muerte en 1916, cita el mismo pasaje que doy en la nota 38 y dice que éste prueba que Mach "no ha estado lejos de exigir una teoría general de la relatividad, hace ya casi medio siglo". Si no lo hizo, prosigue Einstein, fue debido tal vez a que le faltó

---

38. "El experimento de Newton con el cubo de agua en rotación enseña únicamente que la rotación del agua relativa a las paredes del cubo no suscita fuerzas centrífugas observables, pero que tales fuerzas sí son suscitadas por la rotación relativa a la masa de la tierra y los demás cuerpos celestes. Nadie puede decir cómo se desarrollaría el experimento si las paredes del cubo se tornasen cada vez más gruesas y masivas hasta alcanzar varias millas de espesor" (Mach, *Mechanik*, p. 226).

"el sentimiento de la necesidad de una definición de la simultaneidad de los sucesos distantes en el espacio" y "la viva conciencia de que la igualdad de la masa inerte y la masa grave de los cuerpos invita a postular la relatividad en sentido amplio, por cuanto no estamos en condiciones de decidir mediante experimentos si la caída de los cuerpos relativamente a un sistema de coordenadas debe explicarse por la presencia de un campo gravitacional o por un estado de aceleración del sistema en cuestión" (1916b, p. 103).

En su alocución a la 85ª asamblea de científicos alemanes en 1913, Einstein explica la conexión entre la relatividad (generalizada) del movimiento y lo que llama "relatividad de la inercia", en términos que ponen bien en claro la motivación filosófica de su pensamiento:

> No tiene sentido hablar del movimiento y, por lo tanto, tampoco de la aceleración absoluta *(an sich)* de un cuerpo *A*. Sólo se puede hablar del movimiento o la aceleración de un cuerpo *A* relativamente a otros cuerpos *B*, *C*, etc. Lo que vale para la aceleración desde el punto de vista cinemático, debiera valer también para la resistencia inercial que los cuerpos oponen a una aceleración. Cabe esperar a priori —aunque no sea rigurosamente necesario— que la resistencia inercial no sea otra cosa que una resistencia a la aceleración relativa del cuerpo *A* respecto al conjunto de los demás cuerpos *B*, *C*, etc. Es sabido que E. Mach expuso por primera vez con toda nitidez y claridad este modo de ver en su Historia de la Mecánica [. . .]. Llamaré a esta concepción la "Hipótesis de la Relatividad de la Inercia". Al igual que Mach, no pienso que la relatividad de la inercia responda a una necesidad lógica. Pero una teoría en que se cumpla la relatividad de la inercia es más satisfactoria que la teoría hoy corriente porque en esta última se introduce el sistema inercial, *cuyo estado de movimiento, por una parte* no está condicionado por los estados de los objetos observables, y por consiguiente *no está causado por nada que sea accesible a la percepción, pero, por otra parte, está llamado a determinar el comportamiento de las partículas materiales.*
>
> (Einstein 1913, pp. 1260, 1261; cursiva mía)

La frase con que termina este pasaje resume el "defecto epistemológico" de la teoría de Newton que, como vimos en el § 2, Einstein (1916, p. 771) entiende haber superado en la Relatividad General mediante la adopción del Principio de Relatividad (*a*). La estrecha vinculación que existe a ojos de Einstein entre la "relatividad general" y la idea de Mach —según él la entiende— se expresa así en la memoria cosmológica de 1917:

> En una teoría de la relatividad consecuente no puede haber inercia *con respecto al* "*espacio*", sino sólo una inercia *recíproca* de las masas. Por lo tanto, si alejo suficientemente en el espacio a una masa de todas las demás masas del mundo su inercia tiene que caer a cero.
>
> (Einstein 1917, p. 132)[39]

Por último, en 1918, Einstein confiere a la idea de Mach el rango de un principio separado, distinto del Principio de Relatividad (*a*). ¿Cómo se cumple este "Principio de Mach" en la Relatividad General? Para dilucidar esta cuestión conviene recordar algunas ideas ya expuestas arriba. En la Relatividad Especial, la trayectoria inercial de una partícula es una recta espacio-temporal. El Principio de Equivalencia equipara el movimiento inercial con la caída libre en un campo gravitacional homogéneo. La validez local de la Relatividad Especial sugiere que se identifique la trayectoria de una partícula que cae libremente en un campo gravitacional cualquiera con una geodésica del espacio-tiempo riemanniano de curvatura variable cuya métrica constituye ese campo. Como las geodésicas están determinadas por la métrica, el Principio de Mach se traduce en la exigencia de que la métrica del espacio-tiempo esté cabalmente determinada por

39. En otro lugar, Einstein había descrito esta idea como "el audaz pensamiento de Mach de que la inercia tiene su origen en una interacción del punto-masa considerado con todos los demás" (Einstein y Grossmann 1913, p. 6).

la distribución de la materia. El estudio de la mecánica de los continuos en el marco de la Relatividad Especial había revelado la conveniencia de representar una distribución continua de materia como un campo tensorial simétrico covariante de orden 2 —llamémosle *T*— cuyos componentes T_{ij} $(0 \leq i \leq j \leq 3)$ con respecto a un dado sistema de coordenadas representan la densidad de energía (T_{00}), los tres componentes de la densidad de momento (T_{01}, T_{02}, T_{03}) y los seis componentes de la tensión ($T_{\alpha\beta}$; $1 \leq \alpha \leq \beta \leq 3$) referidos a ese sistema. También las densidades de energía y momento y las tensiones del campo electromagnético se representan convenientemente por un campo tensorial como ese. La Relatividad General adopta el campo tensorial *T* de energía, momento y tensión —llamado comúnmente "tensor de tensión y energía"— como la representación general de la materia y la energía (no gravitacional), dejando a las teorías físicas especiales—como la hidrodinámica o la electrodinámica—la construcción detallada del mismo en cada situación. Conforme al Principio de Mach, dados los componentes T_{ij} del tensor de tensión y energía con respecto a un sistema de coordenadas, debe ser posible calcular los componentes g_{ij} de la métrica espacio-temporal con respecto a ese sistema. Para resolver este problema Einstein propone sus ecuaciones de campo, que constituyen, como se sabe, la médula misma de la Relatividad General. Son diez ecuaciones diferenciales con diez incógnitas que son los g_{ij}.[40] Tal como se acostumbra a presentarlas, un miembro de cada ecuación es uno de los diez componentes arriba mencionados del tensor de tensión y energía, mientras que el otro miembro es el componente correspondiente de otro campo tensorial simétrico del mismo tipo que suele llamarse el tensor de Einstein. Éste satisface las condiciones siguientes:

40. Debido a que la métrica es un campo tensorial simétrico, $g_{ij} = g_{ji}$. Por lo tanto, aunque los g_{ij} son 16, no hay más de 10 diferentes.

(i) El tensor de Einstein se construye exclusivamente a partir de la métrica espacio-temporal y sus derivadas. (Sólo así es posible calcular los componentes de la métrica integrando las ecuaciones de campo).

(ii) El tensor de Einstein depende de las derivadas segundas de los componentes de la métrica. (Este requisito tiene que cumplirse para que la ecuación de Poisson, que gobierna la gravitación newtoniana, constituya una primera aproximación a las ecuaciones de la nueva teoría).

(iii) El tensor de Einstein no depende de las derivadas de orden superior a dos. (Este requisito se adopta por razones de simplicidad y porque Einstein no creía que con los recursos experimentales disponibles se pudieran discernir los "efectos de tercer orden" de una derivada tercera mayor o menor que 0).

(iv) El tensor de Einstein satisface las mismas condiciones de conservación (local) que el tensor de tensión y energía; por lo tanto, su divergencia covariante es igual a 0. (De otro modo, las ecuaciones serían falsas).

Para satisfacer los requisitos (i), (ii) y (iii) es necesario y suficiente que el tensor de Einstein se construya exclusivamente a partir del tensor de Riemann que gobierna la curvatura del espacio-tiempo (véase el Capítulo 2). Sean R^j_{ihk} los componentes del mismo con respecto al sistema de coordenadas elegido.[41] Entonces, los componentes del lla-

41. A los componentes g_{ij} de la métrica en su forma ordinaria (covariante) corresponden los componentes g^{ij} de su forma contravariante, dados por las diez ecuaciones $\Sigma^3_{k=0}\, g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j$ (donde $\delta^i_j = 1$ si $i = j$ y 0 si $i \neq j$). Entonces los componentes Γ^i_{jk} de la conexión lineal determinada por la métrica están dados por

$$\Gamma^i_{jk} = \tfrac{1}{2}\Sigma^3_{k=0}\, g^{ik}(\partial g_{jh}/\partial x^k + \partial g_{kh}/\partial x^j - \partial g_{jk}/\partial x^k)$$

y los componentes del tensor de Riemann están dados por mado tensor de Ricci están dados por

$$R_{ij} = \sum_{m=0}^{3} R_{ijm}^{m} \tag{4.5}$$

y el escalar de curvatura es la función

$$R = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} g^{ij} R_{ij} \tag{4.6}$$

El sistema de ecuaciones más general que cumple con las condiciones (i)–(iv) es el siguiente:[42]

$$R_{ij} - \tfrac{1}{2} R g_{ij} + \lambda g_{ij} = -\kappa T_{ij} \tag{4.7}$$

donde κ y λ son constantes. κ depende del sistema de unidades adoptado; bajo las convenciones que seguimos aquí, hay que tomarla positiva para ajustarse a la experiencia. λ suele llamarse la constante cosmológica. En las primeras presentaciones de la Relatividad General (Einstein 1915a, 1916), el término λg_{ij} no figura, lo que equivale a tomar $\lambda = 0$. Y en verdad, como Einstein reconocerá más tarde, no hay ninguna base *empírica* para asignarle un valor significativo. λg_{ij} hace su primera aparición en "Consideraciones cosmológicas", donde Einstein postula que λ es ligeramente mayor que 0 para que sea posible su universo estático, espacialmente finito pero limitado (1917, p. 151).[43] En

---

$$R_{ihk}^{j} = \frac{\partial \Gamma_{ki}^{j}}{\partial x^{h}} - \frac{\partial \Gamma_{hi}^{j}}{\partial x^{k}} + \sum_{m=0}^{3} \Gamma_{ki}^{m} \Gamma_{hm}^{j} - \sum_{m=0}^{3} \Gamma_{hi}^{m} \Gamma_{km}^{j}$$

42. Una demostración especialmente clara de esta aseveración se hallará en Arzeliès 1961, pp. 163–168. Lovelock 1971 demostró que es redundante exigir —como Arzeliès— que la dependencia a que se refiere la condición (ii) sea *lineal*.

43. Entre los modelos cosmológicos de Friedmann (1922, 1924) hay uno análogo —aunque no estático, sino en expansión— que satisface la condición $\lambda = 0$. Cuando se persuadió de la expansión del universo, Einstein llegó a decir que su hipótesis de que $\lambda \neq 0$ había sido el peor error de su vida.

“Cuestiones de principio” (1918, p. 243) señala que si $\lambda = 0$, las ecuaciones (4.7) admiten la solución g_{ij} = const. con $T_{ij} = 0$ (para todos los índices i y j). En otras palabras, las ecuaciones (4.7) permiten atribuir una métrica determinada al espacio-tiempo aunque éste no contenga nada de materia. Einstein concluye que el Principio de Mach manda suponer que $\lambda \neq 0$, puesto que, de no ser así, la métrica no quedaría determinada completamente por la distribución de la materia.[44] Sin embargo, cuando Einstein somete su artículo a la revista *Annalen der Physik* en marzo de 1918 ya se había publicado en Holanda e Inglaterra la solución de W. de Sitter a las ecuaciones (4.7) con $T_{ij} \int\ 0$ y $\lambda \neq 0$.[45] No es raro, pues, que Hermann Weyl, el gran expositor de la Relatividad General, abandonase el Principio de Mach. Según Weyl, la Relatividad General no sostiene que la materia determina al espacio-tiempo sino que materia y espacio-tiempo interactúan. En esta interacción, por lo demás, el espacio-tiempo tiene la primacía o, como Weyl prefiere decir, hay una “fuerte preponderancia del éter”.[46] Por su

---

44. “Conforme a las ecuaciones (1) [de Einstein 1918, equivalentes a nuestras ecuaciones (4.7) sin el término λg_{ij}—R.T.] se podría concebir, en contradicción con el Postulado de Mach, un campo métrico sin ninguna materia generadora”. Einstein agrega el término λg_{ij} a sus ecuaciones (1). Las ecuaciones así obtenidas llevan en su artículo el número (2). Einstein comenta: “Conforme a las ecuaciones (2) parece no haber un continuo espacio-temporal exento de singularidades con un tensor de energía de la materia que se anule por doquier” (Einstein 1918, p. 243).

45. W. de Sitter 1917, 1917a, 1917b. Posteriormente se han descubierto otras soluciones de las ecuaciones de campo que no son compatibles con el Principio de Mach (Gödel 1949, Taub 1951, Oszvath y Schücking 1969).

46. Weyl 1924, p. 76. El artículo entero merece atenta lectura. Weyl analiza, entre otras cosas, un resultado de Thirring y Lense (1918) que Einstein (1956, p. 103) había acogido como una confirmación del acuerdo entre la Relatividad General y la idea de Mach. Esos autores demostraron que, según la Relatividad General, una masa esféricamente simétrica con una cavidad interior genera al rotar

parte, en las conferencias que dicta en Princeton en 1921 Einstein todavía intenta probar que la Relatividad General "respalda vigorosamente las ideas de Mach sobre la relatividad de todas las acciones inerciales", las cuales, "si se las piensa al cabo", llevan a "esperar que toda la inercia, esto es, todo el campo g_{ij}, esté determinado por la materia del universo" (1956, p. 103). Pero más tarde cambió de parecer. En las postrimerías de su vida recomienda que "no se hable más del Principio de Mach" (carta a Felix Pirani del 2 de febrero de 1954, citada en el Capítulo 6, nota 9).

En cambio, otros autores han querido reivindicar el Principio de Mach, ora reemplazando la Relatividad General por una teoría distinta que de veras lo satisfaga, ora reformulándolo de modo que la Relatividad General concuerde con él. Entre los primeros, el más prominente es R. H. Dicke, autor con G. Brans de una nueva teoría de la gravitación cuyo mérito más señalado parece ser la conformidad con el Principio de Mach (Brans y Dicke 1961, Dicke 1964, 1964a). Entre los últimos está H. Hönl, quien reclama la determinación de la métrica espacio-temporal por la energía e impulso de la materia *sumados* a la energía e impulso del propio campo gravitacional (Hönl 1966, p. 31).[47] También J. A. Wheeler, quien entiende que el Prin-

---

un campo de fuerzas de Coriolis en esa cavidad. Según esto, la fuerza de Coriolis que actúa sobre el péndulo de Foucault, etc., podría explicarse indiferentemente por la rotación de la tierra con respecto a la distribución media de la materia en el universo o por la rotación de esta última con respecto a la tierra. Pero Weyl hace ver que, para obtener su solución, Thirring y Lense tienen que suponer —como Schwarzschild (1916) en su clásica solución de las ecuaciones de campo— que la métrica del espacio-tiempo se aproxima asintóticamente a la de la Relatividad Especial. "En virtud de esto el borde infinitamente distante del espacio actúa aquí como un agente material, generador del campo" (Weyl 1924, p. 68), en evidente oposición al Principio de Mach.

47. A esta exigencia se ajustan según Hönl todos los modelos espacialmente finitos y cerrados, pero también quizás algunos modelos abiertos.

cipio de Mach debe suministrar las condiciones de borde que permitan separar las soluciones físicamente admisibles de las ecuaciones (4.7), de las soluciones físicamente inadmisibles (1964, p. 306). Elaborando esta idea Wheeler concluye que las exigencias del Principio de Mach quedan satisfechas si requerimos que "la especificación de una geometría tridimensional cerrada suficientemente regular y de la densidad y flujo de la masa-energía en dos instantes contiguos determine la geometría del espacio-tiempo, pasada, presente y futura, y con ella las propiedades inerciales de cada partícula de prueba infinitesimal" (p. 333).

Sorprenderá tal vez que Wheeler presente su programa como expresión de las ideas de Mach, puesto que el mismo requiere que la estructura geométrica del *espacio* —en dos secciones tridimensionales, temporalmente vecinas del continuo espacio-temporal— esté dada a priori, junto con, pero independientemente de la distribución contemporánea de la materia. No puedo entrar en esta cuestión aquí, aunque es oportuno señalar que aun en la versión de Einstein el llamado Principio de Mach no suprime del todo la autonomía de la geometría. En efecto, según el Principio (*c*), la distribución de la materia debe determinar el campo métrico, pero los aspectos geométricos más fundamentales del espacio-tiempo —la topología, la estructura diferenciable— no sólo son independientes de la distribución de la materia sino que tienen que darse por supuestos para que tenga sentido representarla como un campo tensorial.

5

Causalidad y geometría cósmica en la Teoría de la Relatividad

1

La idea moderna de causalidad, dominante desde el siglo XVII, no corresponde a la acepción en que se usaba el término ‘causa’ (*causa*, *αἰτία*) en la tradición aristotélica. Mientras que el físico aristotélico buscaba las causas de las *cosas*, y admitía como tal a todo aquello—fuesen estructuras o materiales, impulsos o metas— que de uno u otro modo contribuyera a dar cuenta del objeto estudiado, el físico moderno inquiere las causas de *sucesos* o *procesos*, vale decir, las condiciones suficientes para producirlos. Suele escucharse que este cambio tan drástico en el sentido y alcance de una de las categorías fundamentales del pensamiento científico resulta de un cambio de propósito: la ciencia moderna, dicen, persigue la dominación, no la contemplación, de la naturaleza. Con tal fin en vista, el hombre de ciencia se inclinará por cierto a ignorar los fines propios de la naturaleza misma —si es que los hay— y a considerar cada materia natural como un agregado de disposiciones activas y pasivas para asistir o resistir a los propósitos humanos. Sin embargo, aunque el eventual “dueño y señor de la naturaleza” (Descartes, AT, VI, 62) se liberase así de la preocupación aristotélica con lo que se llamaban causas finales y materiales, no podía dirigir toda su atención a las “fuentes del cambio” (*ἀρχαὶ t°ς μεταβολ°ς*) o causas eficientes en completo desdén de la forma o estructura. Pues las causas eficientes sólo pueden captarse como tales en un contexto de estructura determinada. Es verdad que el método experimental característico de la investigación científica moderna es apropiado sobre todo para descubrir la presencia y modo de operar de los agentes naturales. Pero los resultados de un experimento sólo tienen sentido si se los describe y entiende, junto con el arreglo experimental que los produce, en términos estructurales. ¿Por qué, entonces, 'causa', en las lenguas modernas, se ha tornado sinónima de 'causa eficiente', mientras que la idea de 'causa formal' y de explicación por la estructura, aunque viva y activa en la práctica científica, ha casi desaparecido del discurso metacientífico?[1] Una breve reflexión sobre el programa de investigación bosquejado en el Prefacio de los *Principia* de Newton arrojará luz sobre esta cuestión. Newton proponía que la filosofía natural descubriera las fuerzas de la naturaleza a través del estudio de los fenómenos del movimiento, para luego, de esas fuerzas, inferir los demás fenómenos.[2] El fin último del programa era pues derivar el curso de la naturaleza de las fuentes activas de cambio. La filosofía natural está concebida aquí, con toda lucidez, no como una búsqueda de causas en general, en el sentido aristotélico y medieval, sino específicamente de causas *eficientes*, fuerzas, agentes de cambio. Pero éstas han de colegirse de un tipo particular de cambios, a saber, los movimientos o cambios de lugar. Y según Newton éstos sólo pueden describirse en términos de dos estructuras matemáticas, el tiempo, isomórfico[3] a $\mathbb{R}$ (el cuerpo de los números reales), y el espacio, isomórfico a $\mathbb{R}^3$ (= $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times$

1. Una excepción notable, en este punto, como en tantos otros, es T.S. Kuhn. Véase "Concepts of cause in the development of physics" en Kuhn 1977, pp. 21-30.

2. "Omnis enim philosophiæ difficultas in eo versari videtur, ut a phænomenis motuum investigemus vires naturæ, deinde ab his viribus demonstremus phænomena reliqua" (Newton, *Principia*, p. 16).

3. Uso 'isomórfico' para decir 'estructuralmente equivalente'. Al hacer precisos los conceptos de estructura y equivalencia de estructuras, 'isomórfico' adquiere el significado técnico que tiene en la literatura matemática. Véase el Vocabulario matemático, *s.v.* ISOMORFISMO.

ℝ, el conjunto estructurado de todos los triples de reales), con la métrica estándar.[4] Así pues, la nueva filosofía natural no descuida lo que Newton entendía que era el trasfondo estructural de los procesos y sucesos físicos, sino que lo da por supuesto como un requisito para captar las relaciones causales que el programa de Newton busca descubrir. Un vínculo estrecho entre espacio y tiempo y causalidad es la premisa básica de la física de las fuerzas centrales que prevalece durante el auge del newtonismo en el siglo XVIII y el primer tercio del siglo XIX. Según esta concepción —que se expresa, por ejemplo, en la electrostática de Coulomb y la electrodinámica de Ampère— las fuerzas de la naturaleza dependen de las posiciones cambiantes de sus fuentes en el espacio, de modo que la causalidad está subordinada a la geometría.

En un importante manuscrito "Sobre la gravedad y el equilibrio de los fluidos", publicado por A.R. y M.B. Hall en 1962, Newton caracteriza expresamente el espacio y el tiempo como puras estructuras o sistemas relacionales:

> Del mismo modo que las partes del tiempo se individualizan por el orden, de suerte que (por ejemplo) si el día de ayer pudiera permutar su orden con el día de hoy y tornarse posterior perdería su individualidad y ya no sería más el día de ayer sino el de hoy; así también las partes del espacio se individualizan por sus posiciones, de modo que si dos cualesquiera de ellas pudiesen permutar sus posiciones, permutarían a la vez su identidad y cada una se convertiría como individuo en la otra. Sólo en virtud del orden y las posiciones relativas se conciben las partes del tiempo y del espacio como siendo esas mismas que de veras son; y no tienen otro

---

4. La métrica estándar de ℝ estipula que la distancia entre dos números a y b es el valor absoluto de su diferencia: $|a - b|$. La métrica estándar de $\mathbb{R}^3$ estipula que la distancia entre los triples $\mathbf{a} = \langle a_1,a_2,a_3\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1,b_2,b_3\rangle$ es la raíz cuadrada positiva de la suma de cuadrados: $(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2$.

> principio de individuación que ese orden y esas posiciones, las cuales, por lo tanto, no pueden cambiar.
>
> (Hall y Hall 1962, p. 103)[5]

Tales estructuras tienen su propio modo de existir (*quendam sibi proprium existendi modum*) y no caen bajo las categorías de sustancia y accidente entre las que la ontología tradicional repartía todos los entes. No son sustancias, pues no son subyacen a ningún modo propio de acción, como la mente al pensamiento o el cuerpo al movimiento; pero tampoco son accidentes, ya que podemos claramente concebir que existan sin sustrato alguno, "como cuando nos imaginamos espacios extramundanos o lugares cualesquiera vacíos de cuerpos" (p. 99).

Los filósofos rara vez se han sentido a sus anchas en el espacio y el tiempo newtonianos. Como generalmente son menos audaces y más estrechos de criterio que Newton, no han estado dispuestos a admitir que exista algo que no es una sustancia ni un atributo o relación de sustancias y que, por lo tanto, no se deja describir con la tradicional terminología escolástica. Hasta un pensador tan osado como Kant sólo pudo avenirse con el tiempo y el espacio de Newton por la vía de considerarlos como "meras formas" de la sensibilidad humana y degradar todo lo que está contaminado con ellas al rango de "mero fenómeno". No hace falta recordar aquí los numerosos intentos de elaborar una teoría

---

5. He aquí el texto original de este importantísimo pasaje: "Quemadmodum enim durationis partes per ordinem individuantur, ita ut (instantiae gratia) dies hesternus si ordinem cum hodierno die commutare posset et evadere posterior, individuationem amitteret et non amplius esset hesternus dies sed hodiernus: Sic spatij partes per earum positiones individuantur ita ut si duae quaevis possent positiones commutare, individuationem simul commutarent, et utraque in alteram numerice converteretur. Propter solum ordinem et positiones inter se partes durationis et spatij intelliguntur esse eaedem ipsae quae revera sunt; nec habent aliud individuationis principium praeter ordinem et positiones istas, quas proinde mutare nequeunt."

"relacionalista" del espacio y el tiempo físico, en virtud de la cual estas estructuras o sistemas relacionales no se verían ya como sosteniéndose por si solas —o por la sola voluntad de Dios— como las veía Newton, sino como un reflejo abstracto de la red efectiva de relaciones cambiantes entre las cosas materiales. Tales intentos cobraron nueva vida en nuestro siglo tras la profunda revisión a que Einstein sometió nuestras ideas de espacio y tiempo. En general, se pensaba —por lo menos hasta que Adolf Grünbaum (1957) emitió una advertencia sobre "la retención filosófica del espacio absoluto" por parte de la Relatividad General— que la concepción relativista del espacio-tiempo le daba un sólido respaldo a la escuela relacionalista. Más precisamente, se creía que la estructura del espacio-tiempo contemplada por la teoría de Einstein no era sino un esquema —por así decir, una sombra intelectual— del sistema de las relaciones causales entre los sucesos reales. Según Hans Reichenbach, esta "teoría causal del espacio y el tiempo" es "el resultado propiamente filosófico de la Teoría de la Relatividad" (1928, p. 308). "*El orden combinado del espacio y el tiempo se revela como el esquema de orden de las series causales, como expresión de la estructura causal del universo* [. . .]; el tipo de orden de las series causales es lo que brilla desde el fondo más profundo de todas las determinaciones espacio-temporales" (pp. 307–308).

Me propongo analizar y evaluar aquí estas alegaciones en relación con la Relatividad Especial y la Relatividad General. Como veremos, no pueden tener el mismo sentido en ambos contextos. Pero antes de emprender esta tarea, examinemos por un momento las proposiciones de Reichenbach en su abstracta generalidad.[6] A un empirista tradicional, que

6. Hago, pues, caso omiso del particular contexto del que tomé mis citas, el cual contiene la increíble aseveración de que "los campos gravitacionales más generales" contemplados por la Relatividad General pueden "destruir todas las propiedades métricas del continuo espacio-temporal", debido a que todas las varas de medir y los relojes

crea que todo conocimiento científico ha de alcanzarse por inducción a partir de resultados experimentales, le sonarán intrínsecamente verosímiles. Pues cabe razonar así: La Teoría de la Relatividad no da el espacio y el tiempo por descontados; la Relatividad Especial critica la concepción que de ellos se hacía Newton; la Relatividad General vincula la estructura espacio-temporal del universo a la dinámica de la gravedad; de este modo, la geometría del espacio-tiempo se torna objeto de investigación experimental; pero los experimentos propiamente se dirigen a descubrir relaciones causales; por lo tanto, la estructura del espacio-tiempo —en la medida en que no es una convención facticia que se puede modificar a voluntad— tiene que reflejar el sistema causal de la naturaleza (donde 'causal' ha de entender, por cierto, en su limitada acepción moderna). A la luz de un argumento como éste, se comprende por qué la teoría causal del espacio-tiempo es favorecida por los empiristas inductivistas. También logramos barruntar por qué sus defensores suelen aderezarla con uno que otro toque de convencionalismo cronogeométrico, a saber, para cubrir aquellos aspectos de la geometría del espacio-tiempo que la teoría causal aparentemente no es capaz de explicar. Pero el argumento implica, por otra parte, que si la concepción causal del espacio-tiempo relativista es insostenible o puede sostenerse sólo nominalmente, la Teoría de la Relatividad es incompatible con el inductivismo.

2

En esta sección consideraremos la interpretación causal del espacio-tiempo relativista *plano*, esto es, el espacio-tiempo de la Relatividad Especial. Para entender sus tesis y sus

---

se hacen añicos cuando la curvatura espacio-temporal es muy grande (Reichenbach 1928, p. 308).

motivos debemos recordar los principales rasgos de la formulación geométrica de la teoría por Minkowski. Como se mostró en el Capítulo 2 (seccíon titulada "El espacio-tiempo: una variedad de Riemann"), la práctica habitual de asignar coordenadas a cada suceso físico, esto es, un cuádruplo de números reales que varía continuamente cuando el argumento recorre el espacio y el tiempo presupone que los sucesos mismos —o la "cancha" o "escenario" en que ocurren— constituyen una variedad diferenciable cuadridimensional. Minkowski llamó a está variedad "*die Welt*" —"el mundo"— pero preferimos llamarlo "espacio-tiempo". El Principio de Relatividad (especial), formulado por Einstein en 1905, implica que la variedad espacio-temporal admite un atlas de cartas globales con la siguiente propiedad: las leyes de la física referidas a cualquiera de esas cartas revisten la misma forma.[7] Dichas cartas, que llamamos *cartas de Lorentz*, combinan un trío de coordenadas espaciales cartesianas ligadas a un marco rígido en movimiento inercial con una coordenada temporal einsteiniana definida mediante señales de luz reflejadas en ese marco (como se explica en el Capítulo 4, pp. 70-71). La postulada invariancia de la forma de las leyes físicas cuando se sustituye una carta de Lorentz por otra vale, por cierto, únicamente si en la construcción de todas las cartas se utilizan las mismas unidades de tiempo y longitud. La forma general de tales sustituciones se determina fácilmente si suponemos con Einstein que

7. Los conceptos de carta y atlas se explican en el Vocabulario matemático, *s.v.* VARIEDAD DIFERENCIABLE. En la formulación matemática de las leyes de la física figuran expresiones dependientes de la posición espacio-temporal de los objetos y cantidades físicas envueltas. Dicha posición se indica, normalmente, mediante coordenadas. Que una ley de la física formulada de este modo *reviste la misma forma* cuando se la refiere a dos cartas cualesquiera de un cierto atlas quiere decir lo siguiente: Si las coordenadas $\langle x^0,x^1,x^2,x^3\rangle$ de una de esas cartas se sustituyen en la formulación referida a ella por las coordenadas $\langle y^0,y^1,y^2,y^3\rangle$ de la otra carta, se obtiene, sin más cambio que ese, la formulación referida a la otra carta.

ellas preservan, en particular, las dos leyes siguientes: el Principio de inercia y el Principio de la constancia de la velocidad de la luz (no importa cuál sea el estado de movimiento de su fuente luminosa). Sean x e y dos cartas de Lorentz. Supongamos primero que tienen el mismo origen.[8] Se puede demostrar que en ese caso la transformación de coordenadas $x \bullet y^{-1}$ es una *transformación de Lorentz*, esto es, una permutación lineal de $\mathbb{R}^4$ caracterizable así: supongamos, para simplificar, que las unidades estándar empleadas en la construcción de las cartas de Lorentz se elijan de modo que la velocidad constante de la luz en el vacío sea igual a 1; entonces la matriz A de cualquier transformación de Lorentz satisface la ecuación $A^THA = H$, donde A^T es la traspuesta de A y H es la matriz diagonal (–1,1,1,1). Si x e y no tienen el mismo origen, $x \bullet y^{-1}$ es una *transformación de Poincaré*, esto es, el producto de una transformación de Lorentz y una traslación. Las transformaciones de Lorentz evidentemente forman un grupo.[9] Por consiguiente, las transformaciones de Poincaré, generadas por el grupo de Lorentz y el grupo de las translaciones, también forman un grupo. El grupo de Poincaré actúa transitiva y efectivamente sobre $\mathbb{R}^4$ a través de las transformaciones de coordenadas entre cartas de Lorentz. Como estas cartas son globales, a cada transformación de coordenadas $x \bullet y^{-1}$ le corresponde una y sólo una transformación puntual $x^{-1} \bullet y$ —esto es, lo que suele llamarse una transformación "activa"— que "biyecta" el espacio-tiempo sobre sí mismo (véase la fig.

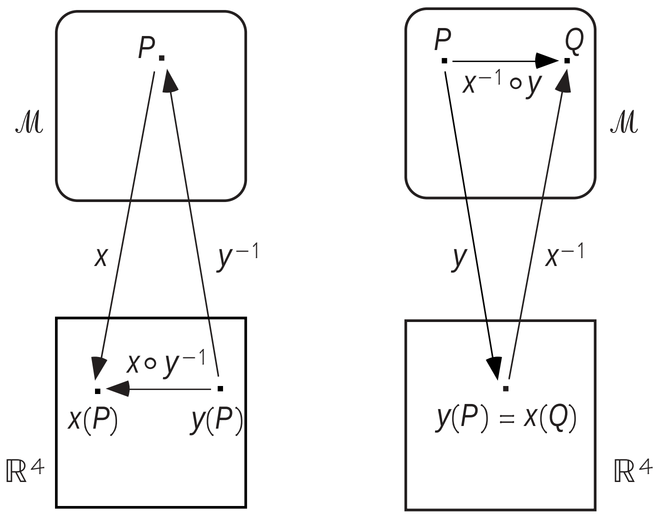
---

8. Esto quiere decir que tanto x como y asignan a un mismo punto del espacio-tiempo el cuádruplo de coordenadas $\langle 0,0,0,0\rangle = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^4$.

9. Sean A y B las matrices de dos transformaciones de Lorentz. Entonces $(AB)^TH(AB) = B^T(A^THA)B = B^THB = H$. Si recordamos que la traspuesta de la matriz inversa A^{-1} es igual a la inversa de la traspuesta A^T, comprobamos que $(A^{-1})^THA^{-1} = (A^T)^{-1}A^THAA^{-1} = H$, de modo que la inversa de A también es una transformación de Lorentz. Por otra parte, es claro que la identidad I es una transformación de Lorentz, puesto que $I^THI = H$.

6).[10] A través de estas transformaciones de puntos, el grupo de Poincaré actúa transitiva y efectivamente sobre el espa-

Fig. 6

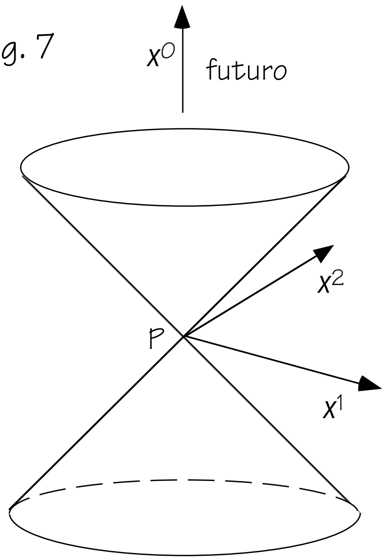


Transformación de coordenadas ("pasiva") y transformación puntual ("activa"). Las cartas de Lorentz *x* e *y* aplican biyectivamente el espacio-tiempo $\mathcal{M}$ sobre $\mathbb{R}^4$. La transformación pasiva $x \bullet y^{-1}$ sustituye el cuadruplo numérico $y(P)$ asignado por y a un punto cualquiera *P*, por el cuadruplo numérico $x(P)$ asignado por *x* a ese mismo punto. La transformación activa $x^{-1} \bullet y$ envía el punto P al punto Q determinado por la ecuación $y(P) = x(Q)$. Más explicaciones en la nota 10.

10. La siguiente explicación suplementa la ilustración gráfica de los conceptos de transformación "activa" y "pasiva", ofrecida en la fig. 6. Tenemos que x e y son cartas globales, es decir, sistemas de coordenadas que asignan en forma exclusiva a *cada* punto del espacio-tiempo $\mathcal{M}$ un cierto cuádruplo en $\mathbb{R}^4$. y^{-1} es la inversa de y. Está definida en todo $\mathbb{R}^4$ y por ende asigna en forma exclusiva a cada cuádruplo de números reales $\langle a_0,a_1,a_2,a_3 \rangle$ un cierto punto $P \in \mathcal{M}$. Sea $x(P) = \langle b_0,b_1,b_2,b_3 \rangle$. Entonces la aplicación compuesta $x \bullet y^{-1}$ le asigna en forma exclusiva al cuádruplo $\langle a_0,a_1,a_2,a_3 \rangle$, el cuádruplo $\langle b_0,b_1,b_2,b_3 \rangle$.

cio-tiempo (según lo concibe la Relatividad Especial).[11] Esta es la clave de la interpretación geométrica de la teoría de

Fig. 7



El hipercono formado por las *geodésicas nulas* que pasan por el punto *P* en el espacio-tiempo de Minkowski. Naturalmente, sólo se pueden representar dos de las tres dimensiones del espacio.

Por lo tanto, $x \bullet y^{-1}$ es una permutación de $\mathbb{R}^4$, esto es, una aplicación biunívoca o *biyección* de $\mathbb{R}^4$ sobre sí mismo. Por otra parte, si $y(P) = \langle a_0,a_1,a_2,a_3\rangle$, $x^{-1}\bullet$ y(P) es el único punto de $\mathcal{M}$ al cual la carta x asigna el cuádruplo $\langle a_0,a_1,a_2,a_3\rangle$. Obviamente, $x^{-1} \bullet$ y(P) asigna en forma exclusiva un punto de $\mathcal{M}$ a cada punto de $\mathcal{M}$. El lector verificará fácilmente que lo mismo vale para la aplicación compuesta $y^{-1} \sum x$. Por lo tanto $x^{-1} \bullet y$ es una permutación de $\mathcal{M}$, una biyección del espacio-tiempo sobre sí mismo.

11. Sea G un grupo de transformaciones puntuales del espacio $\mathscr{E}$. Si $g \in G$, g asigna a cada punto $x \in \mathscr{E}$ una "imagen" $gx \in \mathscr{E}$. Decimos que G actúa *transitivamente* sobre $\mathscr{E}$ si para cada par de puntos x, $y \in \mathscr{E}$ hay una transformación $h \in G$ tal que $y = hx$. Decimos que G actúa *efectivamente* sobre $\mathscr{E}$ si la condición $gx = x$ se cumple para todo $x \in \mathscr{E}$ únicamente en el caso de que g sea el elemento neutro del grupo G.

Einstein por Minkowski. Como mostró Felix Klein en su Programa de Erlangen (1872), la acción de un grupo sobre una variedad induce en ésta una estructura geométrica caracterizada por las invariantes del grupo. La geometría inducida en el espacio-tiempo por la acción citada del grupo de Poincaré está contenida *in nuce* en un solo invariante (de dos puntos) que llamaré la *separación* entre puntos del espacio-tiempo. Consideremos dos puntos P y Q cuyas coordenadas en una dada carta de Lorentz representaremos, respectivamente, por $\langle P^0,P^1,P^2,P^3\rangle$ y $\langle Q^0,Q^1,Q^2,Q^3\rangle$. Entonces, la *separación* entre P y Q está dada por:

$$|P-Q| = \Sigma_h\Sigma_k\, \eta_{hk}\,(P^h-Q^h)(P^k-Q^k) \tag{5.1}$$

donde los índices h y k recorren el conjunto $\{0,1,2,3\}$ y los η_{hk} son los elementos de la matriz H (esto es: $\eta_{00} = -1$; $\eta_{kk} = 1$ si $k > 0$; $\eta_{hk} = 0$ si $h \neq k$).[12] Diremos que P y Q están *separados* si $|P-Q| > 0$ y que están *conectados* si $|P-Q| \leq 0$. Se advertirá que ambas relaciones son simétricas (puesto que $|P-Q| = |Q-P|$). Todos los puntos separados de un cierto punto P caen fuera de un cono[13] de dos lóbulos con su vértice en P (fig. 7). Si Q está situado sobre este cono, la separación $|P-Q| = 0$. El cono se llama por eso *el cono nulo* en P (donde 'nulo' imita la voz alemana 'null', que

12. Se comprueba fácilmente que la separación $|P-Q|$ es un invariante y no depende de la particular selección de una cierta carta de Lorentz. Sea x la carta arriba utilizada, de modo que, para $h = 0,1,2,3$, $P^h = x^h(P)$ y $Q^h = x^h(Q)$. Sea y otra carta de Lorentz, vinculada a x por la transformación $y^h = \Sigma_k A_{hk}x^k + a^h$, donde las a^h son constantes y (A_{hk}) es la matriz de una transformación de Lorentz. Entonces tenemos que $\Sigma_{hk}\eta_{hk}(y^h(P)-y^h(Q))(y^k(P)-y^k(Q)) = \Sigma_{hkji}\eta_{hk}A_{hj}A_{ki}(x^j(P)-x^j(Q))(x^i(P)-x^i(Q)) = \Sigma_{hkji}A^T{}_{jh}\eta_{hk}A_{ki}(x^j(P)-x^j(Q))(x^i(P)-x^i(Q)) = \Sigma_{ji}\eta_{ji}(x^j(P)-x^j(Q))(x^i(P)-x^i(Q)) = |P-Q|$.

13. Se trata de una subvariedad tridimensional del espacio-tiempo. Por lo tanto, siguiendo la práctica de llamar *hipersuperficies* a las subvariedades de n–1 dimensiones de una variedad n-dimensional, habría que decir que ésta es un *hiper*cono.

significa 'cero'). Podemos elegir uno de los dos lóbulos del cono nulo en un punto cualquiera P y llamarlo el cono nulo *futuro* en P. Nuestra selección se propaga entonces inequívocamente por traslación a todos los otros conos nulos. Una transformación puntual que preserva un dado modo de seleccionar los conos futuros se llama *ortócrona*. Las transformaciones ortócronas de Poincaré (respectivamente, de Lorentz) forman un subgrupo del grupo de Poincaré (respectivamente, de Lorentz).

La interpretación causal de la geometría de Minkowski arranca de dos hechos simples concernientes a la separación y conexión entre puntos del espacio-tiempo:

(i) La relación 'mayor que' entre las coordenadas temporales de dos puntos P y Q es preservada por todas las transformaciones ortócronas de Poincaré si P y Q están conectados; pero, en general, no es preservada por dichas transformaciones si P y Q están separados. Si, como se suponía comúnmente hasta el advenimiento de la Relatividad General, las coordenadas temporales admisibles en la física reflejan el orden temporal "real", "objetivo" entre los sucesos, es claro que tal orden sólo puede subsistir entre sucesos que ocurren en puntos conectados entre sí, mas no entre sucesos que ocurren en puntos separados.

(ii) Las condiciones físicas que gobiernan la construcción de las cartas de Lorentz implican que dos puntos separados P y Q pueden unirse mediante una señal sólo si ésta viaja más rápido que la luz (relativamente a cualquier marco de referencia inercial en que el tiempo está definido según el procedimiento de Einstein).

A la luz de estos dos hechos, vemos que cualquier señal más rápida que la luz, es decir, cualquier transferencia de energía y momento con velocidad $|d\mathbf{r}/dt| > c$ (donde t y $\mathbf{r}$ denotan, respectivamente, el tiempo y el vector de posición en una carta de Lorentz) adolece de indeterminación en cuanto a su origen y su destino, pues el suceso que respecto a algunas cartas de Lorentz es la emisión de esa señal constituye su recepción respecto de otras, y viceversa. Si tal indeterminación repugna a nuestras ideas o sentimientos metafísicos tendremos que concluir que todas las transferencias de energía y momento ocurren a una velocidad igual o menor que la de la luz, de modo que una influencia física sólo puede ejercerse entre puntos conectados en el espacio-tiempo. De ello se sigue que *no puede haber una relación causal entre sucesos que ocurren en puntos separados* y que *dos sucesos conectados causalmente tienen que ocurrir en puntos conectados*.

Estas consideraciones confieren a la geometría de Minkowski un claro sentido causal, pero ¿significa eso que ella es sólo un reflejo del sistema de las relaciones causales? A primera vista, no parecería que las relaciones de conexión y separación puedan abarcar o generar el sistema íntegro de los predicados cronogeométricos. Sin embargo, este sorprendente resultado está implícito en la formulación axiomática de la geometría de Minkowski por A. A. Robb (1914). Reichenbach (1924, 1928) la pasa por alto, pero Henryk Mehlberg la aprovecha a fondo en su "Essai sur la théorie causale du temps" (1935/37). Mehlberg deriva la geometría del espacio-tiempo de la Relatividad Especial de un conjunto de axiomas con *un solo primitivo*, a saber, un predicado binario que viene a corresponder exactamente a nuestro '*X* está conectado con *Y*' (pero que Mehlberg llama sin remilgos 'le rapport causal'). No hay que darle mucha importancia a tales proezas de economía sintáctica. Usualmente, la parquedad de los primitivos (términos que no se definen) resulta compensada por el número y la complejidad de los axiomas (proposiciones que no se demuestran). Por ejemplo, Mario Pieri (1899) definió todos los conceptos de la geometría euclidiana a partir del solo concepto de *movimiento*, pero sus veinte axiomas constriñen de tal modo los movimientos en cuestión que basta un solo postulado suplementario —equivalente al Postulado V de Euclides— para que sus 'movimientos' coincidan precisamente con las traslaciones y rotaciones del espacio euclidiano. Del mismo modo, la *relación causal* de Mehlberg no es la noción general y neutra que físicos y filósofos asocian con esa expresión, pues los axiomas de Mehlberg la cargan con todas las connotaciones del *estar conectado* en el espacio-tiempo de Minkowski. No obstante, el logro de Mehlberg —y de Robb— es mucho más significativo que el de Pieri. Si comparamos el 'rapport causal' de Mehlberg —o sea, el estar conectado— con el invariante fundamental de la geometría de Minkowski, esto es, el valor numérico de la separación entre pares de puntos, es claro que la invariancia de éste es una condición mucho más estricta que la de aquél.[14] Al fin y al cabo, dos puntos están conectados cuando su separación es igual a *cualquier* número igual o menor que 0 y la multitud de éstos es indenumerable. Sin embargo, el grupo de transformaciones puntuales ("activas") que preservan el estar conectado —el "grupo causal"— difiere sólo trivialmente del grupo de Poincaré (que es un subgrupo suyo). Como demostró E. C. Zeeman (1964), el grupo causal del espacio-tiempo de Minkowski es el grupo generado por el grupo de Poincaré y el grupo de las dilataciones.[15] Las dilataciones son, por cierto, indenumerables: añaden toda una dimensión al grupo de Poincaré. Pero la diferencia corresponde a la libertad de optar entre diversas unidades de medida y no posee una significación geométrica profunda. Así, el Teorema de Zeeman combinado con la antedicha interpretación causal de la conexión cronogeométrica bastan aparentemente para establecer que, en un universo regido por la Relatividad Especial, la estructura del espacio-tiempo refleja el sistema de las relaciones causales. Sin embargo, como paso a mostrar, pueden esgrimirse varios argumentos que minan la fuerza o restringen el alcance de esta aseveración.

---

14. Dicho de otro modo: la condición $|P - Q| = \textit{constante}$ es más estricta que la condición $|P - Q| \leq 0$.

15. Una *dilatación* es una permutación del espacio-tiempo que multiplica todas las separaciones entre puntos por un mismo factor positivo.

En primer lugar, hay que advertir que, aunque el grupo causal del espacio-tiempo de Minkowski no difiere *geométricamente* del grupo de Poincaré de un modo significativo, ello no significa que su diferencia sea desdeñable también desde un punto de vista *físico.* Sea F una configuración en el espacio-tiempo de Minkowski y $T(F)$ su imagen por la transformación puntual T. Supongamos que F y $T(F)$ representan, respectivamente, las condiciones iniciales de dos experimentos deterministas. Si T es una transformación de Poincaré, el Principio de Relatividad (especial) implica que los dos experimentos tendrán resultados similares; dicho con más precisión, el resultado del segundo tiene que ser la transformada por T del resultado del primero. Pero si T es un elemento típico del grupo causal —o sea el producto de una dilatación y una transformación de Poincaré— no tiene que haber tal correspondencia en los resultados de nuestros experimentos. Una dilatación de las coordenadas —transformación "pasiva"— no es más que un cambio convencional de unidades de medir; pero una dilatación puntual —transformación "activa"— le cambia el tamaño y la duración a las cosas y los procesos físicos y, dada la diversidad de formas cómo las leyes naturales dependen del tiempo y la distancia, esto no es un cambio trivial.

En segundo lugar, debemos tener presente que en la interpretación causal propuesta, la separación y la conexión corresponden a predicados causales *modalizados*: dos sucesos causalmente relacionados ocurren *necesariamente* en puntos conectados; no es *posible* que ocurran en puntos separados. Pero esto no significa que todo par de puntos conectados esté unido en efecto por una cadena causal; inclusive podrían no ser la sede de suceso alguno.[16] La conexión cronogeométrica no es, pues, un destilado abstracto de las

16. Para evitar esta última alternativa, Minkowski postuló que el espacio-tiempo estaba saturado por un continuo de sucesos: "Para que en ninguna parte se abra un abismo (*um nirgends eine gähnende Leere zu lassen*), vamos a pensar que en todo lugar y en todo momento hay

conexiones causales concretas, sino más bien un requisito que éstas deben cumplir. Según esto, la estructura espacio-temporal no sería un reflejo de las relaciones causales efectivas, sino una norma que las constriñe.

En tercer lugar, conviene destacar que la interpretación de la conexión y separación espacio-temporales como conceptos causales modalizados no es una consecuencia lógica de la Relatividad Especial ni está caucionada por los datos empíricos que respaldan esa teoría, sino que obedece a motivaciones filosóficas. La Relatividad Especial implica, sí, que cualquier objeto que se mueve a la velocidad de la luz con respecto a *un* marco inercial se mueve a la misma velocidad con respecto a *todo* marco inercial, y que ningún objeto material puede ser acelerado desde el reposo en un marco inercial hasta alcanzar una velocidad igual o mayor que la de la luz. Esto implica, a su vez, que las cosmolíneas (las trayectorias espacio-temporales) de la materia ordinaria y la radiación sólo pueden unir pares de puntos que estén conectados. Pero la Relatividad Especial no excluye la existencia de objetos físicos que se muevan *siempre* a una velocidad mayor que la de la luz en *todo* marco inercial. En los años 60 varios autores escribieron sobre unas partículas hipotéticas con esta propiedad, a las que llamaron *taquiones* (en inglés, *tachyons*, del griego ταχύς, 'veloz'); pero hasta la fecha no hay indicio alguno de que existan. Conforme a la Relatividad Especial, un taquión, sin ser intrínsecamente absurdo, sería una partícula bastante peculiar. (Por ejemplo, si una partícula se mueve a velocidad $v > c$, el factor de Lorentz $\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ es un número imaginario. Por lo tanto, a esa partícula sólo se le pueden asignar una energía $mc^2\gamma$ y un momento $mv\gamma$ mensurables y, por ende, reales si

---

algo perceptible" (1909, p. 104). En tal caso, las leyes de campo de la física clásica aseguran que cada suceso influye sobre y está influido por lo que ocurre en todos los puntos del espacio-tiempo conectados con el suyo.

el valor de su masa en reposo *m* también es un número imaginario. Esto es inusitado, pero armoniza bien con el hecho de que nadie puede hallar una partícula como ésa en reposo en su laboratorio). Como todos los sucesos en la historia de un taquión ocurren en puntos del espacio-tiempo separados entre sí, están afectados por la ambigüedad del orden temporal a que me referí arriba: el mismo suceso que en un marco inercial es la emisión de un taquión puede ser su absorción en otro, y viceversa. Tal ambigüedad indicaría que el tiempo de Einstein difiere más profundamente del tiempo de Newton de lo que inicialmente se creyó, pero no es lógicamente imposible. Tres cuartos de siglo después de la aparición de la Relatividad General sabemos ya lo bastante sobre el significado físico de las coordenadas como para aceptar cambios aún más drásticos en la descripción de los fenómenos a resultas de una transformación de coordenadas. Uno puede todavía sentir la tentación de preguntar cuál es el "orden real" en que se suceden los eventos taquiónicos; pero ¿es tan seguro que esta categoría es universalmente aplicable? ¿que no le conviene sólo a criaturas como nosotros, lentas y pesadas, con sólo un modesto "poder de resolución" cronogeométrico? Surgirían paradojas genuinas si pudiéramos emplear los taquiones para alterar el pasado. Sean *A* y *B* son dos puntos conectados del espacio-tiempo, ocupados, por ejemplo, por dos hechos de mi vida, y sea *C* otro punto, separado de *A* y *B*. Si se pudiera transferir energía y momento mediante taquiones, podría haber una cadena causal cerrada de *A* a *A*, pasando por *B* y *C*. ¿No podría yo entonces tratar de cambiar desde *B* lo ocurrido en *A* a pesar de que *B* está en el futuro de *A*? En mi opinión, tal intento no sólo iría contra el sentido común, sino contra el concepto mismo de cadena causal cerrada. Si alguien está pillado en una cadena causal cerrada ese mismo hecho lo priva de toda oportunidad de alterarla. Puede que esto ofenda a nuestra presunta dignidad humana, pero ciertamente es compatible con nuestra idea corriente de la realidad física.[17]

Aunque los taquiones no existan, el que sean compatibles con la Relatividad Especial implica que el distingo entre pares de puntos conectados y separados en el espacio-tiempo no basta para distinguir los sucesos que pueden estar unidos por un vínculo causal de los que no pueden, sino que corresponde más bien a dos formas concebibles de enlace causal, a saber, (i) a través de taquiones y (ii) a través de la radiación y la materia masiva. Esta conclusión concuerda con los datos empíricos en que se inspiró originalmente la Relatividad Especial. Estos no constituían una muestra estadística de pares de sucesos físicos que indicase cuáles estaban causalmente enlazados y cuáles no, sino que eran testimonios de la validez de las ecuaciones electrodinámicas de Maxwell-Lorentz, referidas a cartas de Lorentz, en cualquier marco inercial. Tal validez implicaba que la velocidad de la luz permanecía invariante bajo las transformaciones de Poincaré y era la cota superior mínima de la velocidad de cualquier trozo de materia masiva ordinaria con respecto a un marco inercial. La existencia de tal cota invariante entrañaba, a su vez, el distingo citado entre dos modos de propagación de la influencia causal.

Por último, debo señalar que la teoría causal del espacio-tiempo no puede dar cuenta de lo que es quizás la manifestación más notable de la geometría de Minkowski en la Relatividad Especial, a saber, el comportamiento de las partículas masivas libres, esto es, de la materia ordinaria exenta de la influencia causal de otra materia o radiación. La cosmolínea de una partícula así aislada es una recta, esto es, un camino en el espacio-tiempo de Minkowski cuya imagen por una carta de Lorentz satisface una ecuación lineal. Dos puntos P y Q sobre este camino satisfacen la

17. Sobre este tema de las cadenas causales cerradas en espacio-tiempos relativistas podrán consultarse con provecho los Capítulos 6 y 7 del libro de John Earman, *Bangs, Crunches, Whimpers and Shrieks* (en vías de publicarse cuando éste entró en prensa).

desigualdad $|P - Q| < 0$. Es de presumir que los taquiones libres, si existieran, obedecerían a la misma ley, con $|P - Q| > 0$. Así, el espacio-tiempo no sólo regula las varias avenidas abiertas —o cerradas— a la conexión causal. También fija el curso a seguir por cualquier cosa que esté causalmente desconectada de todo lo demás. A fin de cuentas, pues, la Relatividad Especial le ofrece poco solaz al causalista.

3

La eficacia que la Relatividad Especial atribuye a la estructura espacio-temporal como guía del movimiento libre de la materia (y de la propagación de la radiación en el vacío) fue, a ojos de Einstein, una razón poderosa para reemplazar esa teoría por la Relatividad General.[18]

> El principio de inercia [. . .] nos compele, al parecer, a atribuirle propiedades físicamente objetivas al continuo espacio temporal. Así como era consistente, desde el punto de vista newtoniano, hacer la doble aseveración *tempus est absolutum, spatium est absolutum*, así también, desde el punto de vista de la Teoría Especial de la Relatividad, hemos de decir *continuum spatii et temporis est absolutum*. En esta última aseveración *absolutum* significa no sólo 'físicamente real', sino además 'independiente en sus propiedades físicas, fuente de un efecto físico, pero no influenciado a su vez por condiciones físicas'. [. . .] Pero [. . .] concebir una cosa (el continuo espacio-temporal) que actúa ella misma, mas sobre la cual no se puede actuar, va contra el modo científico de pensar.
>
> (Einstein 1956, pp. 55s.)

En la Teoría General, la geometría del espacio-tiempo también constituye un "campo guía" (*Führungsfeld*) para la radiación y la materia *en caída libre*, pero responde a su vez a la distribución efectiva de la materia y la radiación. De

18. Para más detalles, véase el Capítulo 3.

este modo, la relación entre la geometría y el juego de las interacciones causales en la naturaleza toma un nuevo cariz: aquélla no es meramente la reflexión abstracta de éste, ni la norma a que tiene que ajustarse, sino que participa en él como un jugador hecho y derecho.

Para ver como opera esta idea, recordemos que la Relatividad General concibe el espacio-tiempo como una variedad riemanniana cuadridimensional cuyo campo métrico induce la geometría de Minkowski en el espacio tangente en cada punto.[19] Los componentes métricos g_{ij} (con respecto a una carta cualquiera x)[20] son soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein:

$$R_{ij} - \tfrac{1}{2}Rg_{ij} = -\kappa T_{ij} \tag{5.2}$$

donde las R_{ij} son los componentes del tensor de Ricci construido a partir de la métrica **g**, R es la traza de la matriz $[R^i_j]$,[21] κ es una constante que depende de las unidades de medir, y las T_{ij} son los componentes de una

19. Véanse los Capítulos 2 y 7.

20. El campo métrico **g** es un campo tensorial covariante de rango 2 definido sobre el espacio-tiempo $\mathcal{M}$ (*véase* al final de los artículos VECTORES Y TENSORES y VARIEDAD DIFERENCIABLE, en el Vocabulario matemático). Como tal, **g** le asigna a cada par de campos vectoriales definidos sobre un subconjunto abierto $U \subseteq \mathcal{M}$ una función diferenciable $U \rightarrow \mathbb{R}$. Sea x^k la k-ésima coordenada de nuestra carta x. Sea $\partial/\partial x^k$ el campo vectorial cuyas curvas integrales son las curvas paramétricas de x^k (es decir, las líneas trazadas en el dominio de la carta x al variar la k-ésima coordenada mientras las demás coordenadas se mantienen constantes). El componente métrico g_{ij} es simplemente la función $\mathbf{g}(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j)$. Los componentes tensoriales R_{ij} y T_{ij} que figuran en las ecuaciones (5.2) se definen análogamente.

21. Los componentes R^i_j del tensor "mixto" de Ricci están dados por $R^i_j = \Sigma_h g^{ih} R_{hj}$. Por lo tanto, $R = \Sigma_i R^i_i = \Sigma_i \Sigma_h g^{ih} R_{hi}$. En estas expresiones, los g^{ih} son los componentes "contravariantes" de la métrica **g**, definidos por $\Sigma_h g^{ih} g_{hj} = \delta^i_j$ (donde "la delta de Kronecker" δ^i_j es igual a 1 si $i = j$, y es igual a 0 si $i \neq j$).

generalización idónea del tensor de tensión y energía —introducido por Max von Laue (1911) en el contexto de la Relatividad Especial— y representan la distribución de la materia y la energía no gravitacional. Si V es un campo vectorial cualquiera definido en un entorno abierto en el espacio-tiempo, $\mathbf{g}(V,V)$ es un campo escalar (esto es, una función con valores reales—cf. la nota 20) sobre el dominio de V. Si $\mathbf{g}(V,V) = 0$ en todo su dominio decimos que V es un campo vectorial *nulo*; si $\mathbf{g}(V,V) < 0$ en todo su dominio, decimos que V es *temporaloide*, y si $\mathbf{g}(V,V) < 0$ en todo su dominio, decimos que V es *espacialoide*. Habitualmente se da por supuesto que el espacio-tiempo admite un campo vectorial temporaloide global, cuyo valor en cada punto puede entonces utilizarse para distinguir entre 'el futuro' y 'el pasado'. (Esto no se deduce del sistema de ecuaciones (5.2)). Una curva lisa en el espacio-tiempo es *temporaloide* (o, respectivamente, *espacialoide* o *nula*) si es tangente en cada punto a un campo vectorial temporaloide (espacialoide, nulo). En la Teoría de Relatividad General se postuló inicialmente —y más tarde se dedujo, bajo ciertas condiciones especiales, del sistema de ecuaciones (5.2)— que las cosmolíneas posibles de una partícula masiva en caída libre, eléctricamente neutra y sin momento angular son precisamente *las geodésicas temporaloides del espacio-tiempo*. Von Laue (1920) y Whittaker (1928) demostraron que las cosmolíneas posibles de un pulso de luz en el vacío son precisamente *las geodésicas nulas.* También la energía gravitacional se propaga a lo largo de geodésicas nulas (Einstein 1918). Debido a la validez local de la Relatividad Especial, las cosmolíneas de partículas masivas siempre son curvas temporaloides, y las cosmolíneas de los taquiones, si existieran, serían espacialoides.

Digamos que dos puntos espacio-temporales están *conectados* si los une una curva temporaloide o nula, y que están *separados* si no se puede unirlos con una curva tal. Al extendérselas de este modo a la Relatividad General, las relaciones de separación y conexión evidentemente conservan el mismo significado causal que tenían en la Relatividad Especial. Pero no puede aspirarse a fundar en ellas una teoría causal general del espacio-tiempo relativista. Salvo en el caso particular de la métrica "plana" de Minkowski, la métrica de un espacio-tiempo relativista no está determinada meramente por la repartición de sus puntos entre pares separados y pares conectados. Un teorema demostrado por Weyl (1921) dice que para fijar la métrica (*modulo* un factor de proporcionalidad) no basta clasificar los pares de puntos espacio-temporales por su conexión o separación; además hay que discernir todos los caminos geodésicos (esto es, los alcances o imágenes de curvas geodésicas).[22] El que estos dos conjuntos de datos —qué pares de puntos están separados o conectados, qué caminos son geodésicos— contengan esencialmente *todo* lo que hace falta saber sobre la geometría riemanniana del espacio-tiempo relativista dice mucho acerca de su verdadero significado físico. Pues, tomados conjuntamente, dichos datos especifican cuáles son los caminos geodésicos que consisten exclusivamente de puntos conectados entre sí, esto es, las trayectorias espacio-temporales reservadas para la radiación y las formas más simples de materia ordinaria en caída libre. Como Ehlers, Pirani y Schild (1972) demostraron en un trabajo memorable, la especificación de dichas trayectorias es *suficiente* y *necesaria* para determinar la métrica (*modulo* un factor de proporcionalidad). Tenemos, pues, que en el caso general la estructura del espacio-tiempo relativista es más rica que el esquema abstracto de vínculos causales viables articulado en las relaciones de separación y conexión, pero es *exactamente tan rica* como hace falta para que desempeñe su función de campo guía de la materia y la radiación. Cabe concluir, por lo tanto, que esta función es la razón de ser de la geometría del espacio-tiempo.

---

22. El distingo entre *curva* y *camino* se explicó en el Capítulo 2.

La idea de que una estructura geométrica pueda contribuir en efecto a modelar el acontecer físico es tan ajena a nuestro modo tradicional de pensar que, desde el advenimiento de la Relatividad General, ha habido una tendencia a desentenderse de ella, a reducir la geometría del espaciotiempo a la función de mera mediadora entre las cosas materiales en interacción, tal vez sólo una auxiliar para el cálculo. Hasta el mismo Einstein puede haber sucumbido a esta tendencia en los primeros tiempos de la teoría, cuando todavía acataba la autoridad de Mach. A primera vista, parecería que interpretación está incorporada en las ecuaciones de campo de Einstein, puesto que la distribución de la materia representada por las T_{ij} al lado derecho de (5.2) obviamente ha de ser la fuente del campo representado por las g_{ij} a través del cual la acción de la gravedad se ejerce sobre una partícula de prueba. Sin embargo, como mostró de Sitter ya en 1917, el sistema de ecuaciones (5.2) admite soluciones *sin fuentes* ($T_{ij} \int \;\; 0$) — aparte de la solución de Minkowki, que puede reputarse trivial. Por cierto, se puede alegar que tales soluciones son sólo una consecuencia de las propiedades matemáticas formales de las ecuaciones de Einstein, que nada tienen que ver con el significado real de sus términos en aplicaciones físicas genuinas. Pero aunque aceptásemos este alegato,[23] el caso es que en una ecuación ninguno de los dos lados tiene prioridad sobre el otro y sería más razonable decir que las ecuaciones de Einstein expresan una dependencia mutua de la materia y la geome-

---

23. La restricción por motivos filosóficos del posible significado físico de un objeto matemático puede ser inobjetable —por ejemplo, en el caso de los ingenieros eléctricos que descartan la parte imaginaria de los números complejos que figuran en los resultados de sus cómputos— pero a veces puede limitar gravemente el poder heurístico de una teoría. El ejemplo clásico son las soluciones de la ecuación de Dirac que asignan valores negativos a la energía; quienes recomendaron descartarlas tuvieron que tragarse sus palabras cuando objetos correspondientes a dichas soluciones empezaron a aparecer en fotografías (cf. Hanson 1963).

tría que no una subordinación total de ésta a aquélla. De hecho, hay soluciones físicamente significativas de las ecuaciones de Einstein en que el campo métrico no puede decirse que medie entre sus fuentes y una partícula de prueba encarrilada por él, pues las condiciones imperantes no permiten ninguna forma de acción gravitacional de las fuentes sobre esa partícula, o sólo una que sería insuficiente para explicar el comportamiento predicho de la misma.

Considérese, por ejemplo, la solución de Schwarzschild (1916) para el espacio vacío, en que se basan las tres pruebas clásicas de la Relatividad General (precesión del perihelio de Mercurio, curvamiento de un rayo de luz estelar que pasa cerca del sol, corrimiento hacia el rojo de las líneas espectrales al caer el potencial gravitacional). La solución no se deduce de un conocimiento detallado de la distribución de la materia, sino de supuestos sobre la estructura global del campo métrico, a saber, que se lo puede partir en tajadas espacialoides esféricamente simétricas, asintóticamente planas, isométricas entre sí.[24] Uno supone naturalmente que la fuente del campo tiene la misma simetría. Pero no hay ninguna indicación de cómo la fuente puede haber producido el campo, el cual, por ser estático, no exhibe ningún rastro de su origen. Además, si la fuente está contenida entera dentro del llamado "radio de Schwarzschild"[25] es imposible que ella envíe radiación gravitacional —o de nin-

---

24. La última condición significa que la métrica no varía en el tiempo (es estática); la penúltima consiste en que la métrica converge —en cada tajada— a la métrica plana de Minkowski, a infinita distancia espacial del centro de simetría. De hecho, estas dos condiciones son redundantes, pues se deducen de la primera: la métrica de Schwarzschild es la *única* solución esféricamente simétrica de las ecuaciones de campo de Einstein para el espacio vacío (la ecuaciones (5.2) con $T_{ij} = 0$). Véase Birkhoff 1923, p. 255; Petrov 1969, p. 360; Hawking y Ellis 1973, Apéndice B.

25. El radio de Schwarzschild es igual a $\kappa/8\pi$ veces la masa de la fuente, donde κ es la constante que figura en las ecuaciones (5.2); esto es, aproximadamente, 6 km si la fuente tiene la masa del Sol.

guna otra clase— a regiones del espacio situadas fuera de ese radio, de suerte que el campo de Schwarzschild y cualquier partícula de prueba que lo cruce no pueden hallarse en dependencia causal de la fuente. La materia que cae dentro del "hoyo negro" determinado por el radio de Schwarzschild se torna dinámicamente ociosa con respecto al espacio fuera de él. (Es fácil pasarlo por alto si uno sigue pensando en términos de la acción instantánea a distancia de la teoría newtoniana). Por lo mismo, el que el campo de Schwarzschild persista inalterado aunque su fuente se hunda isotrópicamente bajo su propio peso no permite concluir que la fuente permanece escondida dentro de la singularidad en el eje de simetría, en vez de simplemente aniquilarse: en la Relatividad General clásica, cualquier cosa que se hunde en una singularidad de ese tipo es sustraída para siempre de la economía de la naturaleza.[26]

Cabría objetar al análisis precedente que el campo de Schwarzschild no es menos irreal que las soluciones sin fuente material que resolvimos dejar a un lado. Es útil sólo como una primera aproximación al campo que rodea a un gran astro, el cual es, por supuesto, *casi* estático y *casi* esféricamente simétrico y se acerca mucho a la métrica plana de Minkowski en los vastos espacios prácticamente vacíos que separan a dicho astro de otros como él. Pero todas las situaciones reales a que se aplica la solución de Schwarzschild tienen que haberse generado en alguna época en virtud de procesos dinámicos surgidos de sus respectivas fuentes materiales. Para evitar este tipo de objeciones tenemos que volvernos hacia las soluciones cosmológicas de las ecuaciones de Einstein, que abarcan *todos* los sucesos en su campo de aplicación. Démosle una mirada a las más sencillas: la familia de soluciones descubierta por Alexander Friedmann (1922, 1924), de las que la solución estática de

---

26. Distinto es el caso del híbrido de Relatividad General y Mecánica Cuántica que Stephen Hawking utiliza en su célebre trabajo sobre evaporación de hoyos negros (1975).

Einstein (1917) y la solución sin fuentes materiales de Willem de Sitter (1917, 1917a, 1917b) son casos límites. Como se vio en el Capítulo 2, las soluciones de Friedmann proveen un marco dentro del cual es fácil dar cuenta del corrimiento sistemático hacia el rojo de las líneas espectrales en la radiación procedente de galaxias lejanas descubierto por Slipher (1913, 1915, 1917) y de la radiación térmica isotrópica del trasfondo detectada por Penzias y Wilson (1965). Para obtener sus soluciones, Friedmann postuló que la materia puede representarse como un fluido sin presión e introdujo las siguientes hipótesis concernientes, como él dice, "al carácter general, por así decir, geométrico del universo" (1922, p. 378):

(i) El espacio-tiempo admite una coordenada temporal global cuyas curvas paramétricas son las curvas integrales del campo vectorial que representa la cosmovelocidad de la materia. Dicha coordenada mide el tiempo propio a lo largo de las cosmolíneas de la materia.
(ii) Las hipersuperficies perpendiculares a las curvas paramétricas de esa coordenada temporal son subvariedades tridimensionales máximamente simétricas y, por lo tanto, variedades riemannianas de curvatura constante (con la métrica positivo-definida que induce en cada una de ellas la métrica del espacio-tiempo).

Las ecuaciones (5.2) implican rigurosamente que las cosmolíneas de las partículas de un fluido sin presión son geodésicas temporaloides (Einstein y Grossmann 1913, p. 10; cf. Rindler 1977, p. 182). Estas geodésicas son, por cierto, precisamente las curvas integrales del campo vectorial de las cosmovelocidades a que se refiere el postulado (i) y constituyen por ende una congruencia[27] que llena todo el

27. Una *congruencia de curvas* en una variedad $\mathcal{W}$ es una colección de curvas en $\mathcal{W}$ que cumple la condición siguiente: cada punto de $\mathcal{W}$ pertenece a una y sólo una curva de la colección.

universo de Friedmann. Excepto en algunos casos especiales —que incluyen la solución estática de Einstein y la solución vacía de de Sitter— todas las geodésicas de esa congruencia son incompletas[28] y están enfocadas en las dos direcciones del tiempo creciente y el tiempo decreciente (en el caso de los universos de Friedmann que se expanden y recontraen), o al menos en una de esas dos direcciones (en todos los demás casos). Como las geodésicas en cuestión están parametrizadas por el tiempo propio, la materia en un universo de Friedmann típico tiene sólo un pasado y/o un futuro finito.

La propiedad de los universos de Friedmann que más nos interesa aquí es que contienen horizontes (Rindler 1956). Sea p una partícula y $\Pi(p)$ el conjunto de todos los puntos del espacio-tiempo desde los cuales puede enviarse una señal a p. El *horizonte de sucesos* de la partícula p es la frontera de $\Pi(p)$. Sea S un suceso en la historia de p y $\Gamma(S)$ el conjunto de todas las cosmolíneas de partículas materiales desde las cuales puede enviarse a p una señal luminosa —o un pulso gravitacional— que llega a p antes de que ocurra S. El *horizonte de partículas* del suceso S es la frontera de $\Gamma(S)$.[29] A menos que el horizonte de sucesos de p esté vacío

28. El concepto de geodésica incompleta se explicó en la sección titulada “Los universos de Friedmann” en el Capitulo 2.

29. El concepto de *frontera* se explica en el artículo TOPOLOGÍA en el Vocabulario matemático. La frontera del conjunto de puntos $\Pi(p)$ está dada con la topología del espacio-tiempo $\mathcal{M}$. Para que tenga sentido hablar de la frontera de $\Gamma(S)$ hay que darle una topología al conjunto K de todas las cosmolíneas de la materia de nuestro universo de Friedmann. Esto se logra de un modo natural y fácil, si recordamos que K constituye una congruencia de curvas (nota 27) y por lo tanto determina una partición del espacio-tiempo (lo divide exhaustivamente en clases de puntos mutuamente exclusivas, los puntos de cada cosmolínea). Sea f la aplicación que asigna a cada punto del espacio-tiempo la cosmolínea a que pertenece. Le daremos a K la topología más gruesa que asegure que f sea una aplicación continua.

($\overline{\Pi(p)}\setminus\Pi(p) = \varnothing$), hay puntos del espacio-tiempo desde los cuales no puede llegar a p ninguna forma de influencia causal. A menos que el horizonte de partículas de S esté vacío ($\overline{\Gamma(p)}\setminus\Gamma(p) = \varnothing$), hay partículas materiales que no pueden ejercer ninguna forma de influencia causal sobre p antes de que ocurra S. El típico universo de Friedmann y otros modelos cosmológicos afines pero más realistas tienen horizontes de partículas no vacíos (MacCallum 1971). Considérese una particula p en un universo de Friedmann que se expande desde un punto. Sea $t(S)$ el tiempo que la coordenada temporal global descrita en el postulado (i) asigna al suceso S en la historia de p. Retrocedamos en esa historia, llamando S a un suceso cada vez más temprano. A medida que el tiempo correspondiente $t(S)$ disminuye, aproximándose a la cota inferior máxima del tiempo universal, hay cada vez menos partículas dentro del horizonte de partículas de S, hasta que al final, en el límite, p se queda sola. En la época más temprana de la evolución del universo cada partícula sólo ha tenido oportunidad de recibir influencia —gravitacional, por ejemplo— de sus vecinas más cercanas. Por lo tanto, no tiene sentido tratar de explicar la estructura global del campo métrico de Friedmann, que configura las cosmolíneas de la materia, por la interacción gravitacional de cada partícula material con todas las otras. *La comunicación mutua entre las distintas partes de la materia se alcanza gradualmente, dentro del marco establecido por el campo métrico.*

A muchos filósofos les repugna atribuir a las tendencias evolutivas inherentes en la geometría del espacio-tiempo un efecto dinámico tan dramático como la expansión del universo. Sin embargo, en el contexto de la cosmología relativista, no veo modo de evitar tal atribución. Cuando John Earman escribió que en la Relatividad General "la desviación de las cosmolíneas de un sistema de partículas de prueba es causada por la curvatura del espacio-tiempo" (1972, p. 84), Bas van Fraassen protestó que "la aseveración de que el espacio-tiempo causa desviaciones en las cosmolíneas confunde las categorías" (1972, p. 93).[30] Van Fraassen tendría toda la razón si Earman estuviera diciendo que la curvatura del espacio-tiempo desvía las cosmolíneas como un policía desvía el tráfico. Pero la aseveración cuestionada quiere decir únicamente que la rapidez con que, al tiempo de ocurrir un suceso *S* en la historia de una partícula de prueba *p*, la cosmolínea geodésica de *p* se acerca a (o aleja de) las geodésicas temporaloides vecinas depende funcionalmente de la curvatura del espacio-tiempo en el punto en que ocurre *S*. Ahora bien, los físicos dicen corrientemente, en un sentido enteramente análogo, que el campo electromagnético desvía un haz de partículas cargadas y nadie nunca los ha acusado de confundir las categorías cuando hablan de esta manera. De hecho, en cuanto Riemann logró caracterizar una vasta familia de estructuras geométricas —inclusive la familiar geometría euclidiana y la minkowskiana, todavía desconocida a la sazón— mediante un campo tensorial, esto es, mediante un objeto matemático del mismo tipo que el que normalmente se usa para representar un campo de fuerzas, estaba abierto el camino para incorporar la geometría física al dinamismo de la naturaleza. Sin embargo, aunque la representación de las relaciones métricas del espacio-tiempo mediante un campo tensorial nos brinda un medio para entender y formular con precisión la interdependencia entre ellas y las fuerzas naturales radicadas en la materia, no hay que saltar a la conclusión de que la Relatividad General ha superado el dualismo de causa y estructura que señalábamos en la dinámica newtoniana. El mismo concepto de un campo tensorial *presupone* el continuo (la variedad diferenciable) en que está definido. El juego dinámico de las fuerzas regidas por las ecuaciones de campo de Einstein requiere una "cancha" lisa, estructurada topológica-

30. 'Confusión de categorías (*category mistake*)' es el tipo de error que comete, por ejemplo, quien pregunta por el peso en gramos de una nota musical, o le atribuye deseos a una computadora.

mente, en la cual desenvolverse.[31]

Se han hecho varios intentos para derivar la topología del espacio-tiempo relativista de una supuesta topología atribuida a las cadenas causales, equivalente, al menos en un entorno de cada suceso, a la topología estándar de la recta (y de $\mathbb{R}$).[32] Muy interesante para estos efectos es la *topología de caminos* definida por Hawking, King y McCarthy (1976). Para explicarla necesito introducir algunos términos.[33] Sea $\mathcal{M}$ un espacio-tiempo relativista cualquiera. Una curva lisa en $\mathcal{M}$ está *dirigida al futuro* si el vector tangente a cada punto de la curva está (i) sobre el cono nulo futuro en ese punto o (ii) en el interior de la región de vectores temporaloides cuya frontera es ese cono (cf. la fig. 7, en la p. 112). Considérese un punto $P \in \mathcal{M}$ y un subconjunto $U \subseteq \mathcal{M}$. El *futuro* $I^+(P,U)$ de P con respecto a U es el conjunto de todos

---

31. El concepto de topología permite darle un sentido a la vez preciso y abstracto a las nociones intuitivas de continuidad y vecindad, inherentes a cualquier idea de espacio. Véase la explicación en el Vocabulario matemático.

32. Una topología así puede introducirse en cualquier cadena causal en términos de la relación de precedencia causal $\prec$, si se postula (i) la *densidad*: dados dos sucesos a y b tales que $a \prec b$, hay un tercer suceso c, distinto de aquellos dos, tal que $a \prec c \prec b$; y (ii) la *continuidad*: si los sucesos de una cadena causal se dividen exhaustivamente en dos grupos mutuamente exclusivos A y B, de modo que todos los sucesos de A precedan causalmente a cada uno de los sucesos de B, siempre hay un suceso k en la cadena, perteneciente a A o a B, tal que k ocupa un lugar intermedio en la cadena causal entre cada suceso $a \in A$ y $b \in B$ (siempre que $a \neq k \neq b$). Muchos piensan que la conciencia que uno tiene de su propia vida certifica la densidad y continuidad de las cadenas causales.

33. Los términos que definiré se utilizarán luego en la definición de la topología de caminos. Para definirlos tengo que valerme de términos corrientes de la geometría diferencial que muchos lectores que me han acompañado hasta aquí posiblemente desconocen. Como aquí no puedo explicar estos términos, a su vez, con la latitud necesaria para que me entiendan, les sugiero que omitan la lectura del resto de este párrafo y de todo el siguiente.

los puntos de U a los que se llega desde P avanzando por curvas lisas dirigidas al futuro y de longitud finita, cuyo alcance esté enteramente contenido en U. En vez de $I^+(P,\mathcal{M})$ escribimos $I^+(P)$ y lo llamamos simplemente el futuro de P. Una curva lisa *dirigida al pasado*, el *pasado* $I^-(P)$ de un punto $P \in \mathcal{M}$ y su pasado $I^-(P,U)$ con respecto a un subconjunto $U \subseteq \mathcal{M}$ se definen análogamente. Decimos que un entorno U de un punto $P \in \mathcal{M}$ es *normal* si la aplicación exponencial Exp_P aplica difeomórficamente sobre U un entorno del vector 0 en el espacio tangente en P. U es *convexo* si cualquier par de puntos de U están unidos por una geodésica (única, salvo por reparametrización) cuyo alcance está enteramente contenido en U. Una curva continua $\gamma:\mathcal{I} \to \mathcal{M}$ está dirigida al futuro en $t_0 \in \mathcal{I}$ si hay un subintervalo $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{I}$ que contiene a t_0 y un entorno abierto convexo y normal U del punto $\gamma(t_0) \in \mathcal{M}$ tales que, para cualquier $t \in \mathcal{H}$, $\gamma(t) \in I^-(\gamma(t_0),U)$ si $t < t_0$ y $\gamma(t) \in I^+(\gamma(t_0),U)$ si $t > t_0$. Decimos simplemente que γ está dirigida al futuro —a secas— si está dirigida al futuro en cada $t \in \mathcal{I}$. Una curva dirigida al pasado se define en forma análoga. Llamamos *temporaloide* a cualquier curva continua dirigida al pasado o al futuro. No es difícil comprobar que las curvas *lisas* temporaloides, definidas arriba, también son temporaloides en esta acepción más amplia. Considérese ahora la colección $\mathcal{T}$ de todos los caminos temporaloides —esto es, de todas las imágenes o alcances de curvas continuas temporaloides— que cruzan el espacio-tiempo $\mathcal{M}$.[34] Cada elemento $K \in \mathcal{T}$ es un subespacio unidimensional de $\mathcal{M}$. Esto implica que si U es el dominio de una carta de $\mathcal{M}$, $K \cap U$ es un abierto de K. La *topología de*

34. De hecho Hawking *et al.* (1976) definieron la topología de caminos para los espacio-tiempos con estructura causal "fuerte" (*strongly causal spacetimes*), los cuales se caracterizan porque cada punto tiene un entorno en que ninguna curva temporaloide o nula penetra más de una vez. De paso, conviene señalar que en ese escrito un 'camino' (*path*) es lo que yo llamo una curva y una 'curva' (*curve*) es lo que yo llamo un camino.

caminos de $\mathcal{M}$ es la topología más fuerte que induce en cada camino temporaloide *la misma topología* que éste tiene como subespacio de $\mathcal{M}$. Pero a diferencia de esta topología, generada por los dominios de cartas, la topología de caminos está determinada unívocamente —al requerirse que sea la más fuerte— por la topología unidimensional de cada camino, esto es, por las relaciones de vecindad en cada cosmolínea posible de la materia. David Malament (1977) demostró que una permutación $f: \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ que preserve la topología de caminos (esto es, tal que f y su inversa f^{-1} apliquen abiertos sobre abiertos) preservará también la estructura diferenciable de $\mathcal{M}$, la topología estándar ligada a esa estructura y el distingo entre pares de puntos conectados y separados.[35]

Otros dos teoremas, también demostrados por Malament (1977), ilustran asímismo los lazos entre topología y causalidad en un espacio-tiempo relativista $\mathcal{M}$. Si f es una permutación de $\mathcal{M}$ tal que tanto ella como su inversa f^{-1} aplican caminos temporaloides sobre caminos temporaloides, f preserva la topología estándar que $\mathcal{M}$ posee por ser una variedad diferenciable. Además, si $\mathcal{M}$ es un espacio-tiempo en que cada punto tiene un pasado y un futuro distinto del pasado y del futuro de cualquier otro punto, entonces cualquier permutación $f: \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ que aplique el futuro y el pasado de cada $P \in \mathcal{M}$ sobre el futuro y el pasado de su imagen $f(P)$, respectivamente, preserva la topología estándar de $\mathcal{M}$. Así, la topología estándar está determinada, en una vasta familia de casos, por el esquema de las posibles cosmolíneas de la materia.

Los resultados de Malament atestiguan que las relaciones básicas de vecindad de los puntos del espacio-tiempo están

35. Propiamente, lo que Malament demostró es que, si $f: \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ es un homeomorfismo de la topología de caminos, f es lisa y la métrica relativista $\mathbf{g}$ y su transformada $f_*\mathbf{g}$ son conformes (vale decir: $f_*\mathbf{g} = \omega^2\mathbf{g}$, donde $\omega: \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ es una función lisa). Esta última condición implica evidentemente que $\mathbf{g}$ y $f_*\mathbf{g}$ determinan el mismo cono nulo en el espacio tangente en cada punto de $\mathcal{M}$.

estrechamente ligadas con las posibles relaciones causales entre sucesos que ocurran en ellos. Pero no se puede pretender que aquéllas se reduzcan a éstas. Más vale que sea así. Pues cuando les toca explicar la relación causal, filósofos de las más diversas posiciones mencionan la contigüidad espacial y temporal como el atributo más seguro y menos problemático de la misma. Así, para David Hume, la primera "regla para juzgar las causas y los efectos" es que "la causa y el efecto tienen que ser contiguos en el espacio y el tiempo" (*Treatise*, I.iii.15, p. 173). Y el célebre análisis anti-humeano de la relación causal por C.J. Ducasse se expresa íntegro en términos espaciales y temporales.[36] Evidentemente, Hume y Ducasse sentían que nuestras ideas de tiempo y espacio eran más claras y estaban menos necesitadas de una explicación que nuestra idea de causa. Si, como me parece, su sentimiento era justo, la teoría causal del espacio-tiempo sería un ejemplo notorio de *elucidatio per obscurius*.[37]

---

36. Ducasse (1926) define la causalidad así:

> Considerando dos cambios *C* y *K* (en el mismo o en distintos objetos), se dice que el cambio *C* ha sido suficiente para el cambio *K* o, en otras palabras, que *C ha causado* a *K* si: (1) El cambio *C* ocurrió durante un tiempo y a través de un espacio que terminan en el instante *I* en la superficie *S*. (2) El cambio *K* ocurrió durante un tiempo y a través de un espacio que empiezan en el instante *I* en la superficie *S*. (3) No ocurrió ningún otro cambio fuera de *C* durante el tiempo y en el espacio de *C* y no ocurrió ningún cambio fuera de *K* durante el tiempo y en el espacio de *K*.

37. Agradezco a David Malament y John Stachel las valiosas sugerencias que me hicieron a propósito de una versión preliminar de este capítulo. Espero haberlas tenido debidamente en cuenta al redactar la versión final.

6

Teorías matemáticas e ideas filosóficas en la cosmología

Los filósofos de la ciencia suelen decir que la física resulta de una interacción entre la teoría y los hechos. Por *teoría* entenderemos aquí la teoría interpretada de una estructura matemática; por *hecho* una descripción de observaciones expresada en tales términos que pueda determinarse si concuerda o no con un teorema de la teoría en cuestión. La conferencia de Max Born, "Experimento y teoría en la física" (1943) contiene una formulación clásica. Born critica allí duramente a los cosmólogos ingleses A. S. Eddington y E. A. Milne por emplear principios filosóficos como premisas fundamentales en la construcción de teorías físicas. En una carta escrita a Born el 7 de septiembre de 1944, Albert Einstein le hace el siguiente comentario sobre su conferencia y, en general, sobre su actitud negativa hacia la especulación filosófica en la física:

> He leído con sumo interés tu conferencia sobre la hegelería que entre nosotros los teóricos resulta ser el elemento quijotesco ¿o diré, más bien, el Tentador? Pero donde este mal o vicio falta por completo, domina el filisteo que es un caso perdido.[1]

Contrastando su propia metodología de la física y la filosofía de la naturaleza con la propuesta por Born, Einstein agrega:

---

1. "Ich habe mit viel Interesse Deinen Vortrag über die Hegelei gelesen, welche bei uns Theoretikern das Don Quijote'sche Element ausmacht oder soll ich sagen, den Verführer? Wo dies Übel oder Laster aber gründlich fehlt, ist der hoffnugslose Philister auf dem Plan" (Einstein y Born 1969, p. 203).

> [Creo] en la legalidad total de un mundo del ser objetivo, que busco capturar por una vía locamente especulativa.[2]

La devoción de Einstein por el “elemento quijotesco” de la ciencia, su firme convicción de que los hechos solos no pueden bastar como guía para la formulación y aceptación de teorías científicas se manifiesta también en otros textos, uno de los cuales cito más adelante.

Las ideas generales sobre la naturaleza de las cosas, ya sea que provengan de una intuición certera o de una especulación loca, son al parecer indispensables para elegir una teoría físicamente viable en la jungla exuberante de las estructuras matemáticas concebibles, infinitas de las cuales pueden ajustarse —dentro del margen de imprecisión admisible— a un dado conjunto de hechos. La interacción entre las teorías matemáticas y las ideas filosóficas no es, pues, menos esencial para el desarrollo de la física que la interacción entre las teorías y los hechos. Aunque dicha interacción puede observarse en todos los campos fundamentales de la investigación física, se destaca especialmente en la cosmología del siglo XX, en parte por la naturaleza misma de su tema, en parte, quizás, también por la índole de las constataciones empíricas en que tiene que apoyarse. Me parece, por eso, que vale la pena ilustrar con ejemplos tomados de la cosmología unas cuantas cuestiones básicas relativas a la interacción entre ideas filosóficas y teorías matemáticas.

1

Una teoría puede ser *corroborada* o *refutada* por los hechos. ¿Qué pueden hacer por ella las ideas filosóficas? En principio, éstas pueden determinarla, suministrándole sus axiomas.

---

2. “Ich [glaube] an volle Gesetzlichkeit in einer Welt von etwas objektiv Seiendem, das ich auf wild spekulativem Wege zu erhaschen suche” (Einstein y Born 1969, p. 204).

El programa cosmológico de Descartes (en la Parte V del *Discurso del método*) debiera tal vez interpretarse como un intento en este sentido. Y en el presente siglo, E.A. Milne se aplicó resueltamente a derivar de unas pocas intuiciones sobre la estructura del universo todo el sistema de las leyes de la física. Pero la cosmología de Milne se vio afectada por una dificultad que surge inevitablemente en todas las empresas de este tipo: para construir efectivamente una teoría matemática de la naturaleza que fuera generalmente adecuada a los hechos pero se basara enteramente en principios a priori, Milne tuvo que suplementar sus postulados alegadamente intuitivos y en todo caso filosóficamente plausibles, con supuestos adicionales que son más o menos obviamente *ad hoc* y que sólo pudo defender con argumentos traídos de los cabellos. Milne parte de que "si es posible entender el universo racionalmente, debe ser posible establecer un método consistente de dar la hora (*a consistent system of time-keeping*) en todo el universo" (1952, p. 50), y funda en ello su idea de una familia de "observadores fundamentales", cada uno de los cuales puede hacer con su teodolito y su reloj un conjunto de observaciones indiscernibles de las efectuadas por cualquier otro observador fundamental. Habiendo *demostrado* que las coordenadas empleadas por tres observadores fundamentales situados sobre una misma recta se conectan entre sí mediante transformaciones de Lorentz, Milne *postula* que esto vale también para cualquier conjunto de observadores fundamentales en el espacio de tres dimensiones (1948, p. 39). Otros supuestos son: que el momento angular neto del universo es igual a 0 (1952, p. 61; cf. empero 1948, p. 93), que la aceleración de una partícula libre es una función de su posición, velocidad y época (1948, p. 64), etc. La presteza con que Milne y otros autores como él están dispuestos a ampliar la base a priori de sus deducciones en la medida en que les haga falta para adelantar sus teorías ha contribuido bastante al desprestigio de la especulación en la filosofía natural.

La teoría cosmológica del universo estable —*Steady State Theory* o SST— de Bondi y Gold (1948; cf. Bondi 1960, cap. XI) ilustra un enfoque algo distinto. La teoría se basa en una idea filosófica expresada en un solo principio, el Principio Cosmológico Perfecto, y unos cuantos hechos innegables, tales como la oscuridad nocturna del cielo o el desplazamiento hacia el rojo de la frecuencia de la radiación procedente de fuentes lejanas. El Principio Cosmológico Perfecto dice que el universo es homogéneo en el espacio y en el tiempo, de modo que cualquier punto de vista espacio-temporal ofrece más o menos el mismo panorama. Este principio se defiende con argumento típicamente filosófico: A menos que el universo presente aproximadamente el mismo aspecto siempre y en todas partes, no tenemos derecho a extrapolar al universo entero los resultados de nuestras mediciones físicas, efectuadas en una región pequeñísima del espacio durante un período ridículamente breve. Tenemos entonces que *o bien* el Principio Cosmológico Perfecto es verdadero y hay que desechar las teorías que lo contradicen, *o bien* es falso, en cuyo caso cualquiera de las teorías particulares elaboradas en oposición a él tiene sólo una probabilidad bajísima de ser verdadera. El Principio Cosmológico Perfecto combinado con el testimonio empírico de que las galaxias se están alejando unas de otras, implica la tesis más famosa y más controvertida de la SST: la creación continua de la materia. Hay cierta ironía en que un principio introducido para asegurar la validez universal de nuestra física terrestre lleve a la negación de una ley que, al menos sobre la tierra, está muy bien corroborada. Antes de que la SST se desacreditara con el descubrimiento de la radiación térmica de trasfondo (Penzias y Wilson 1965), fue vigorosamente combatida en nombre de la conservación de la materia. Por ejemplo, Mario Bunge (1962) sostuvo que la aceptación de la creación continua sería un desastre para el pensamiento científico y lo haría confundirse con la magia. Otros, en cambio, se deleitaron con la curiosa dialéctica de esta teoría en que la repetición incesante de la *creatio ex* *nihilo* garantiza el *nihil sub sole novum*.[3]

En la Teoría General de la Relatividad de Einstein una idea filosófica opera más sutilmente. Aunque evidentemente ha guiado la formulación de la teoría, no está incorporada a ella en la forma de un axioma o grupo de axiomas. Más aun, la teoría, una vez formulada, le confiere una mayor precisión a la idea y hasta la modifica. En respuesta a la observación de Kretschmann (1917) de que la covariancia general es un requisito trivial que cualquier teoría física es capaz de cumplir, Einstein (1918) declaró que la Relatividad General se basa en tres principios: El Principio de Equivalencia, el Principio de Covariancia General y el Principio de Mach (véase el Capítulo 4). Si, de acuerdo con Gerald Holton (1973, 1978), distinguimos en todo producto del pensamiento científico un elemento empírico o fáctico, un elemento lógico-matemático y lo que Holton llama un elemento temático —que quizás coincide con lo que estoy llamando 'ideas filosóficas' y en todo caso lo incluye— es claro que el Principio de Covariancia General es un requisito lógico-matemático y que el Principio de Equivalencia es una extrapolación audaz pero razonable de los hechos. El componente filosófico de la Relatividad General debe pues residir principalmente en el Principio de Mach. Ahora bien, el Principio de Mach no es un axioma de la teoría. De hecho, en la versión propuesta por Einstein en 1918 ni siquiera es un teorema.[4] Pero la idea expresada en el Principio de Mach ciertamente guió a Einstein en la larga y afanosa búsqueda que lo llevó a la Relatividad General.[5] En

3. Compárese la actitud favorable a la SST adoptada por Jacques Merleau-Ponty (1965).

4. En una versión modificada de la Relatividad General, el Principio de Mach determina las condiciones de borde para las ecuaciones de campo (Wheeler 1964).

5. Véase Einstein 1907, p. 454; 1913, pp. 1254s., 1260s.; Einstein y Grossmann 1913, p. 6. Cf. asímismo Einstein 1916a (nota necrológica sobre Mach).

el lenguaje filosófico tradicional, esa idea puede formularse así: El espacio absoluto y el tiempo absoluto —así como el espacio-tiempo absoluto— son ficciones matemáticas físicamente absurdas. Esta idea está implícita en los escritos de Aristóteles y Descartes —los dos filósofos naturales más influyentes antes de Newton— y fue explícitamente defendida por Leibniz contra el portavoz de Newton, Samuel Clarke. También la comparte Kant, pero este filósofo, convencido de que el marco conceptual de la dinámica newtoniana es un prerrequisito de la ciencia natural, se sintió compelido por ello a concluir que la naturaleza misma, considerada como un objeto científico, era no menos irreal —o "trascendentalmente ideal"— que el espacio y el tiempo absolutos. La misma idea inspira también la célebre crítica de Mach al escolio de Newton sobre el espacio y el tiempo (*Mechanik*, pp. 216ss.). Einstein señala esta crítica como la fuente de su Principio de Mach (1918, p. 243n.).

Como el tiempo newtoniano ya había sido descartado por la Relatividad Especial, el Principio de Mach de la Relatividad General debe estar dirigido contra el espacio newtoniano. Según Newton, el carácter absoluto del espacio se manifiesta en los fenómenos de aceleración absoluta (*Principia*, I, 51). A primera vista, resulta paradójico que Newton recurriera con tanta confianza al concepto de aceleración absoluta, mientras que por otra parte no da criterios para el concepto presuntamente más básico de movimiento absoluto ni le asigna ningún papel en su sistema. Pero esta paradoja se disuelve con la interpretación minkowskiana de la Relatividad Especial y la subsiguiente reformulación cuadridimensional de la teoría de Newton por Cartan (1923/24/25) y otros autores. Todo lo que se requiere para conferirle un sentido a la aceleración absoluta sin tener que concebir un movimiento absoluto es que el espacio-tiempo tenga una conexión lineal más la estructura requerida para distinguir cosmolíneas (esto es, curvas espacio-temporales que no sean tangentes en ningún punto a una hipersuperficie de simultaneidad).[6] La conexión lineal determina entonces una red intangible de cosmolíneas geodésicas que son las historias posibles de partículas materiales libres de la acción de fuerzas externas. El movimiento absolutamente acelerado puede entonces definirse simplemente como aquél que se aparta de esta red: el movimiento de una partícula cuya cosmolínea no es una geodésica. Esta reconstrucción del concepto de aceleración absoluta permite entender por fin el significado físico efectivo de lo que Newton estaba diciendo cuando hablaba de un espacio absoluto. En la dinámica newtoniana y en la de la Relatividad Especial, el espacio-tiempo por sí mismo constriñe a cada partícula libre a seguir una especie de riel cósmico. Por otra parte, la presencia de materia en nada afecta la estructura del espacio-tiempo. Según Einstein, tal asimetría en la relación mutua entre dos entidades físicas es completamente contraria a todo lo que sabemos sobre la naturaleza.[7] Esta era la idea que Einstein quiso expresar en 1918 mediante el Principio de Mach. Podemos parafrasearlo así: La conexión lineal y la métrica espacio-temporal de la cual aquella depende en la Relatividad General están totalmente determinadas por la distribución de la materia. Ahora bien, si la Relatividad Especial tiene una validez local, la distribución de la materia debe estar representada por el "tensor de tensión y energía", un campo tensorial simétrico de rango 2 cuya divergencia

6. Una 'hipersuperficie de simultaneidad' en un espacio-tiempo es cualquier subespacio tridimensional que sea el lugar geométrico de sucesos (posibles) simultáneos. En la teoría newtoniana, en que la clasificación de los sucesos en simultáneos y sucesivos es unívoca, cada punto *P* del espacio-tiempo determina una y sólo una hipersuperficie de simultaneidad en la que está situado. Ella es el lugar geométrico de todos los posibles sucesos simultáneos con (lo que ocurra en) *P*.

7. "Concebir una cosa (el continuo espacio-temporal) que actúa ella misma, pero sobre la cual no se puede actuar va contra el modo científico de pensar" (Einstein 1956, pp. 55s.).

covariante es igual a 0. El Principio de Mach implica entonces que los componentes de la métrica con respecto una dada carta del espacio-tiempo tienen que obtenerse por integración de un sistema de ecuaciones diferenciales que relacione los componentes del tensor de energía y tensión con los componentes de un campo tensorial construido a partir de la métrica misma y de sus derivadas con respecto a la carta dada. Si la Teoría de la Gravitación de Newton vale en una primera aproximación, las ecuaciones en cuestión tienen que depender de las derivadas segundas de la métrica. Suponiendo, en aras de la simplicidad, que no entra en juego ninguna derivada de orden superior al segundo, las condiciones enunciadas determinan unívocamente las ecuaciones de campo de la Relatividad General (con dos constantes arbitrarias).[8] Sin embargo, a menos que eso de la "distribución de la materia" se entienda en un sentido muy peculiar, las ecuaciones de campo no satisfacen la versión antedicha del Principio de Mach, pues admiten soluciones aunque el tensor de energía y tensión sea idénticamente igual a cero (De Sitter 1917; cf. Einstein 1918, p. 243). En las postrimerías de su vida, Einstein rechazará expresamente el Principio de Mach de 1918. El 2 de febrero de 1954 escribe a Felix Pirani:

> En mi opinión, no hay que hablar más del Principio de Mach. Procede de una época en que se pensaba que los "cuerpos ponderables" eran la única realidad física y que todos los elementos que no fuesen cabalmente determinables por ellos debían evitarse. Me doy bien cuenta de que yo también estuve mucho tiempo bajo la influencia de esta idea fija.[9]

---

8. Esto es, las ecuaciones (4.7). Véase, por ejemplo, Lovelock 1971; Weinberg 1972, pp. 133-35, 151-55.

9. "Vom dem Mach'schen Prinzip sollte man nach meiner Meinung überhaupt nicht mehr sprechen. Es stammt aus der Zeit, in der man dachte, daß die 'ponderabeln Körper' das einzige physikalisch Reale

Sin embargo, Einstein se mantuvo fiel a la idea original de que el espacio-tiempo no puede actuar sobre la materia sin que ésta actúe a su vez sobre él. El 12 de mayo de 1952 escribe a Born, a propósito del fracaso de uno de los tres efectos clásicos de la Relatividad General, alegadamente comprobado por un experimentalista:

> Si no se conociera ninguna desviación de la luz, ni avance del perihelio, ni desplazamiento de las líneas (espectrales), las ecuaciones de la gravitación serían, sin embargo, convincentes, pues evitan el sistema inercial (ese fantasma que actúa sobre todo, sin que las cosas actúen de vuelta sobre él). Es verdaderamente notable que los hombres sean casi siempre sordos a los argumentos más fuertes y, en cambio, se inclinen siempre a sobreestimar la precisión de las mediciones.[10]

---

seien, und daß alle nicht durch sie völlig bestimmbare Elemente in der Theorie vermieden werden sollten. Ich bin mir der Tatsache wohl bewußt, daß auch ich lange Zeit durch diese fixe Idee beeinflußt war." Este es el párrafo final de la carta escrita a propósito de un escrito inédito que Pirani había sometido a la consideración de Einstein, titulado "On Mach's Principle and preferred directions in General Relativity" ("Sobre el Principio de Mach y direcciones preferidas en la Relatividad General"). El borrador de la carta original, que pude ver en el Archivo Einstein en Princeton, contiene dos frases que Einstein luego borró y sustituyó por otras: Escribió primero "alle nicht auf sie zurückführbaren Begriffe" en vez de "durch sie völlig bestimmbare Elemente in der Theorie", y "Man mag es nur verzeihen" en vez de "Ich bin mir der Tatsache wohl bewußt".

10. "Wenn überhaupt keine Linienablenkung, keine Perihelbewegung und keine Linien-Verschiebung bekannt wäre, wären die Gravitationsgleichungen doch überzeugend, weil sie das Inertialsystem vermeiden (dies Gespenst, das auf alles wirkt, auf das aber die Dinge nicht zurückwirken). Es ist merkwürdig, daß die Menschen meist taub sind gegenüber die stärksten Argumenten, während sie stets dazu neigen, Meßgenauigkeiten zu überschätzen" (Einstein y Born 1969, p. 258).

2

Nuestra segunda cuestión es, por así decir, el revés de la primera. ¿Qué pueden hacer las teorías matemáticas por el mejoramiento de las ideas filosóficas? Es sabido que el desarrollo puramente matemático de una teoría física ha permitido en casos importantes prever hechos completamente insospechados, como la existencia de ondas hertzianas y de antimateria. ¿Será posible que el pensamiento matemático haga un aporte a la filosofía de la naturaleza? Para motivar una respuesta positiva a esta pregunta, examinaré a modo de ejemplo una aplicación filosóficamente significativa del concepto de variedad diferenciable en la cosmología. Dicho concepto es una creación de Riemann, que lo introdujo en su célebre conferencia "Sobre las hipótesis que están en la base de la geometría" (1854) con el propósito filosófico de esclarecer la naturaleza del espacio físico (véase el Capítulo 2). Fue perfeccionado luego por Christoffel, Ricci, Levi-Cività, Weyl, Cartan y otros. La cosmología relativista concibe el universo como una variedad real de cuatro dimensiones con topología de Hausdorff,[11] dotada de una métrica lorentziana.[12] Una variedad con estas propiedades se llama un *espacio-tiempo*. Las propiedades físicas del universo se representan mediante diversos campos de escalares, vectores, tensores o espinores en el espacio-tiempo, vale decir, mediante aplicaciones diferenciables de la variedad en cuestión

11. El concepto de topología está definido en el Vocabulario matemático. Un espacio topológico tiene la *topología de Hausdorff* si cumple con el siguiente requisito: si p y q son dos puntos cualesquiera, existe siempre un entorno abierto de p, U_p, y un entorno abierto de q, U_q, tales que $U_p \cap U_q = \varnothing$.

12. Una métrica riemanniana se dice 'lorentziana' si concuerda en primera aproximación (aproximación *lineal*) con la métrica plana de Minkowski definida en la ecuación (2.5).

en diversos fibrados canónicamente asociados a ella. (De hecho, la propia métrica lorentziana es una aplicación de este género: su codominio es el fibrado de los tensores simétricos covariantes de orden 2). Este marco conceptual hace posible un enfoque totalmente nuevo de uno de los más antiguos y arduos problemas de la cosmología, el problema de la extensión espacial y el comienzo temporal del universo.

Cuando Immanuel Kant, no obstante su bellísimo aporte juvenil al desarrollo de la cosmovisión newtoniana (Kant 1755), declaró que la cosmología era una seudociencia, producto de una ilusión fatal de la razón humana, nombró este problema en primer lugar entre los cuatro que le impusieron esa conclusión (Kant 1781, pp. 424ss., 517ss., etc.). Kant sostuvo que la sucesión temporal de los fenómenos físicos tenía necesariamente un comienzo, porque de otro modo cualquier suceso actual sería el último de una serie eterna, lo que juzgaba absurdo. Sostuvo además, con menos plausibilidad, que el universo tiene que ser finito en extensión, porque una totalidad infinita de cosas sólo puede estar dada entera a la vez si se ha completado una síntesis infinita, lo que también le parecía absurdo. Por otra parte, un universo de extensión finita y que evoluciona desde un instante bien determinado conjura los fantasmas de un espacio vacío que se extiende más allá de sus límites y de un tiempo vacío que trascurre antes de su comienzo. Como Kant estimaba que un espacio y un tiempo vacíos fuera del mundo no eran menos absurdos que una infinitud completada o una eternidad que termina, pronunció imposible a la cosmología y juzgó que el universo era una mera idea, útil para regular la investigación científica pero fuente de inextricables contradicciones en cuanto se pretende considerarlo como un objeto físico genuino, tema propio una ciencia.

Al concebir el universo como una variedad diferenciable, la cosmología relativista puede afrontar a la vez ambos cuernos del dilema kantiano. No hay ninguna dificultad en concebir un espacio-tiempo infinito en el cual los campos materiales toman valores distintos de 0 en todas partes, hasta el infinito. (Esto es, si uno no tiene dificultades con la concepción clásica cantoriana del continuo). Por otra parte, si uno se siente motivado por la experiencia a rechazar la infinitud del universo, puede todavía aceptar el otro cuerno del dilema, pues es posible concebir un espacio-tiempo de extensión finita y duración acotada sin conjurar un vacío fuera de él.

La concepción riemanniana de un universo finito pero ilimitado se ha vuelto bastante familiar después que Einstein la revivió en sus "Consideraciones cosmológicas relativas a la Teoría General de la Relatividad" (1917), dando comienzo con ello a la cosmología del siglo XX. Un espacio-tiempo es espacialmente finito si cada uno de sus puntos está situado en una hipersuperficie espacialoide compacta que corta el espacio-tiempo en dos componentes. (Esta caracterización debe refinarse si se admiten curvas temporaloides cerradas). En la teoría de las variedades diferenciables, un espacio-tiempo así no es más difícil de concebir que, digamos, una superficie cilíndrica cada uno de cuyos puntos está situado en un círculo que corta la superficie en dos. En cambio, el concepto de un universo de duración acotada no está exento de dificultades y merece que le dediquemos más atención.

Recordemos, primero, que un espacio-tiempo puede tener cualquier forma *global*, con tal que cada uno de sus puntos tenga un *entorno* homeomórfico a $\mathbb{R}^4$. Así, un espacio-tiempo $\mathcal{M}$ puede cumplir la condición siguiente:

C Para cada punto $P \in \mathcal{M}$ y cada curva temporaloide γ dirigida al futuro y parametrizada por el tiempo propio (τ) que pase por P, el dominio de γ tiene una cota inferior.

Si prescindimos, en aras de la simplicidad, de los casos de interacción física a lo largo de curvas nulas ($d\tau = 0$),[13] es claro que, para quien vive en un espacio-tiempo como $\mathcal{M}$, ningún proceso que termine en un suceso actual habrá tardado un tiempo infinito en consumarse. Por lo tanto, el espacio-tiempo $\mathcal{M}$ es inmune a las objeciones de Kant contra una eternidad pasada. Sin embargo, $\mathcal{M}$ no está precedido por un tiempo vacío. Para ver esto más claramente, digamos que un punto $P \in \mathcal{M}$ es un *punto inicial* de la curva temporaloide dirigida al futuro $\gamma\colon \mathcal{I} \to \mathcal{M}$ si para cada entorno U de P hay un número real $t_U \in \mathcal{I}$ tal que, si $t \in \mathcal{I}$ y $t \leq t_U$, entonces $\gamma(t) \in U$. Si ningún $P \in \mathcal{M}$ es un punto inicial de la curva $\gamma\colon \mathcal{I} \to \mathcal{M}$, diremos que γ es *inextendible hacia el pasado*. Ahora bien, la condición **C** impuesta a $\mathcal{M}$ no implica que todas las curvas temporaloides dirigidas al futuro y parametrizadas por el tiempo propio que puedan definirse en $\mathcal{M}$ posean un punto inicial. En cambio, **C** implica por cierto que si $\gamma\colon\mathcal{I} \to \mathcal{M}$ es una curva de esa clase *inextendible hacia el pasado*, el intervalo $\mathcal{I}$ que es el dominio de γ *tiene una cota inferior*. Que hay en $\mathcal{M}$ tales curvas inextendibles hacia el pasado puede comprobarse considerando un campo V de vectores temporaloides unitarios definido sobre $\mathcal{M}$. (Tal campo existe si, como es razonable suponer, $\mathcal{M}$ admite una orientación temporal). Sea γ la máxima curva integral de V que pasa por un cierto punto $P \in \mathcal{M}$. En virtud de la condición **C**, el dominio de γ tiene una cota inferior. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la cota inferior máxima de γ es 0. Si γ estuviese definida en 0, $\gamma(0)$ sería evidentemente un punto inicial de γ. Si tal punto existiera tendría un entorno abierto $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$, V estaría definido sobre $\mathcal{U}$ y la máxima curva integral de V que pasa por $\gamma(0)$ tendría valores en la intersección de $\mathcal{U}$

13. Estos casos se pueden tratar utilizando lo que se llama un parámetro afín generalizado, pero tales refinamientos estarían aquí fuera de lugar. Véase B. G. Schmidt 1971; cf. Hawking y Ellis 1973, p. 259.

con el pasado de $\gamma(0)$. Esto contradiría nuestra suposición de que γes una curva integral máxima de V. Por lo tanto, γ no puede estar definida en 0. Además, como γ es una curva integral máxima, no puede extendérsela a una curva γ_1, definida en 0 y que coincida con γ en el dominio de ésta. Por lo tanto, no hay ningún punto de $\mathcal{M}$ que sea un punto inicial de γ.

La condición **C** vale en los modelos de universo con Gran Cataplum ("Big Bang") favorecidos por la cosmología actual. Sea $\mathcal{W}$ un espacio-tiempo con Gran Cataplum y sea $\gamma: \mathcal{I} \to \mathcal{W}$ una geodésica temporaloide dirigida al futuro e inextendible hacia el pasado, parametrizada por el tiempo propio. Supongamos que γ es una geodésica completa, esto es, que su dominio $\mathcal{I} = \mathbb{R}$. Entonces hay un número real t tal que $\gamma(t)$ es el Gran Cataplum, esto es, un punto que contiene toda la energía del universo. En ese punto, la curvatura del espacio-tiempo, el tensor de tensión y energía, etc. no serían diferenciables. Como, por definición, esto es imposible, no puede haber un punto así en $\mathcal{W}$. Por consiguiente, γ no es una geodésica completa y t es una cota inferior —en efecto, la cota inferior máxima— de su dominio. El Gran Cataplum suele describirse como el comienzo del mundo. Comprobamos en el acto que esta descripción es errónea. Los universos con Gran Cataplum tienen una duración pretérita acotada, pero no tienen propiamente un comienzo. No hay en ellos un *primer* instante antes del cual no haya ocurrido suceso alguno. Dado un instante cualquiera P sobre una geodésica temporaloide, siempre hubo otro instante P', *anterior a* P, en el cual ya estaba pasando algo en el mundo. Por otra parte, cada suceso anterior a un suceso dado está separado de éste por un intervalo temporal *finito*. Por eso mismo, en un universo del Gran Cataplum la contingencia radical de la naturaleza se puede tocar, como quien dice, con la punta de los dedos (si logramos estirarlos hacia atrás unos quince mil millones de años). Pero un mundo eterno no sería menos contingente, como Leibniz observó en su escrito "Sobre el origen radical de todas las cosas".[14]

Es instructivo comparar el Gran Cataplum con la singularidad que se halla en el interior de un hoyo negro. Consideraremos la situación más simple en que puede surgir un hoyo negro —un campo de Schwarzschild— y la forma más simple de universo con Gran Cataplum: un universo de Friedmann.

Un campo de Schwarzschild es una solución simétrica y estática de los ecuaciones de Einstein en un espacio-tiempo vacío.[15] La solución de Schwarzschild envuelve una constante de integración m que habitualmente se interpreta, de modo muy natural, como igual a la masa de la fuente material del campo.[16] Si toda la materia de la fuente está situada espacialmente dentro de una esfera de radio inferior a $2Gm/c^2$ —donde G es la constante de gravitación y c es la velocidad de la luz en el vacío— esa materia tiene que acabar comprimida en el centro espacial de simetría del campo. En ese punto, los campos materiales, la curvatura, la métrica, etc., no pueden ser diferenciables, lo que nos fuerza a concluir, una vez más, que en nuestro espacio-tiempo no puede existir ningún punto así. Por lo tanto, un campo de Schwarzschild es un espacio-tiempo al que le falta la línea temporaloide que, de estar presente, constituiría su eje de simetría. La ausencia de esa línea constituye la singularidad del hoyo negro característico del campo en cuestión. La mayoría de los físicos no querrá admitir que la fuente material de un campo gravitatorio pueda así desaparecer del universo y determinar, sin embargo, la estructura

14. Leibniz, GP, VII, 302-308. Traducción castellana de T. Zwanck en Leibniz, EF, pp. 472-480.

15. Véase en el Capítulo 5, la nota 21 y el pasaje del texto que remite a ella.

16. Jammer 1961, pp. 205s. explica y defiende convincentemente esta interpretación.

del campo a través del valor constante de su masa *m*. (La masa *m* de la fuente vendría a ser entonces como la sonrisa del gato de Cheshire —en *Alicia en el país de las maravillas*— que persiste y sigue alegrando el mundo después que el gato ha desaparecido). Ciertamente es posible concebir con todo rigor el campo de Schwarzschild en torno a la singularidad como el campo que deja tras sí una masa que sufre colapso gravitatorio, esto es, que literalmente se autoaniquila. El campo está cabalmente determinado por las condiciones prescritas. La idea de que tiene que derrumbarse en cuanto deje de existir la fuente que lo origina indica sólo una incapacidad para pensar estrictamente en términos de espacio-tiempo y teoría de campos. Pero hay algo filosóficamente inquietante en la noción misma de un trozo de materia que se desvanece en la nada. De ahí el sentimiento ampliamente compartido de que los hoyos negros son una genuina paradoja de la Relatividad General que sólo se podrá superar desde una perspectiva post-relativista, probablemente mediante una teoría cuántica de la gravitación.

Por su parte, los universos de Friedmann se definen mediante la hipótesis drásticamente simplificadora de que el universo está lleno de materia parejamente distribuida.[17] Sea $\mathcal{W}$ un universo de Friedmann con Gran Cataplum descrito, como es habitual, mediante coordenadas de Robertson-Walker. En $\mathcal{W}$, a medida que retrocedemos en el tiempo, considerando puntos espacio-temporales cada vez más tempranos a lo largo de alguna curva paramétrica de la coordenada temporal, la densidad de la materia aumenta indefinidamente. Si ρ es el componente de densidad del tensor de energía y tensión con respecto a las coordenadas adoptadas y γ es una curva paramétrica de la coordenada temporal, la función $\rho \sum\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ crece sin límites cuando el argumento se acerca (desde arriba) a cierto número real

17. Doy más detalles sobre los universos de Friedmann en los capítulos 2 y 7.

t_0. Pero ρ no puede tener un valor infinito en ningún punto del espacio-tiempo. Debemos concluir, pues, que el punto $\gamma(t_0)$ no existe y que t_0 no pertenece al alcance de la coordenada temporal. Pero ni siquiera quienes rechazan la aniquilación de la materia en el eje de simetría del campo de Schwarzschild podrían objetar a esta conclusión, ya que la fuente del campo de Friedmann es contemporánea del campo mismo, y la excisión de la singularidad del Gran Cataplum no es paradójica en el sentido en que parece serlo la excisión de las singularidades de los hoyos negros. Por cierto, una teoría post-relativista que explique los hoyos negros podría arrojar nueva luz sobre el Gran Cataplum e incluso eliminarlo. Sea de esto lo que fuere, la exposición precedente ha mostrado, espero, que mediante la noción matemática de variedad diferenciable inventada por Riemann es posible concebir sin contradicción ni paradoja un universo finito pero ilimitado, que tiene una edad determinada pero no un comienzo.

3

Paso a considerar la última cuestión que plantearé sobre las relaciones entre ideas y teorías. Para explicarla recurro una vez más a la analogía con la interacción entre hechos y teorías. Aunque toda observación puede corregirse y cualquier fenómeno puede describirse de diversos modos en distintos marcos conceptuales, es innegable que algunas constataciones fácticas son definitivas, en cuanto ponen fin de una vez por todas a ciertas hipótesis. Después que los astronautas regresaron de la luna cargados de guijarros, nadie se aventuraría a sostener con Aristóteles que ella está hecha de éter transparente, imponderable, incorruptible. ¿Puede una idea filosófica alcanzar un grado comparable de finalidad? ¿Hay un modo de llegar a ideas definitivas que fijen límites inquebrantables a las teorías que cabe admitir? Algunos filósofos muy ilustres han creído hallar un método que presta este servicio y han puesto mucho empeño en aplicarlo. El más influyente ha sido Kant, quien tuvo la siguiente sencilla y seductora ocurrencia: si logramos especificar cuáles son los requisitos previos del conocimiento científico habremos comprendido también algo sobre su objeto, puesto que "las condiciones de posibilidad de la experiencia en general son a la vez condiciones de posibilidad de los objetos de la experiencia" (Kant 1781, p. 158). Pensaba que sobre esta base se podía sostener que la geometría euclidiana y la cronometría newtoniana, la continuidad del cambio cualitativo, la conservación de la masa, el determinismo causal y la igualdad de acción y reacción entre cuerpos distantes serían ingredientes invariables de la ciencia física. Como es sabido, ni uno solo ha sobrevivido el advenimiento de la Relatividad y los Cuantos.

Pero el fracaso de Kant en la aplicación de su método no significa que el método mismo sea inválido y todavía suelen darse argumentos en estilo kantiano para justificar postulados científicos. Mencioné ya el ofrecido por Bondi y Gold en defensa del Principio Cosmológico Perfecto. El ejemplo siguiente está tomado del libro de Hawking y Ellis sobre *La estructura en gran escala del espacio-tiempo* (1973). A propósito de la existencia de curvas temporaloides cerradas —esto es, homeomórficas a un círculo— en un espacio-tiempo relativista, los autores dicen esto:

> Sin embargo, parecería que la existencia de tales curvas puede dar lugar a paradojas lógicas. Pues cabe imaginarse que uno viaje a lo largo de una curva de esa clase en una nave espacial apropiada y que, retornando antes de partir uno se impida iniciar el viaje. Por cierto, habrá contradicción sólo si damos por supuesta una noción simple de libre albedrío; pero ello no es algo que se pueda descartar livianamente, ya que *toda nuestra filosofía de la ciencia se basa en el supuesto de que uno es libre de ejecutar cualquier experimento.*
>
> (Hawking y Ellis 1973, p. 189; cursiva mía)

Hawking y Ellis se refieren a un modelo cosmológico propuesto por H. Schmidt (1966), que implica curvas temporaloides cerradas y una modificación del concepto de libre albedrío, y declaran finalmente:

> Uno estaría mucho más dispuesto a creer que el espacio-tiempo satisface lo que llamaremos la *condición cronológica*, a saber, que no hay curvas temporaloides cerradas.
>
> (Hawking y Ellis 1973, p. 189)

La condición cronológica es una de las hipótesis de un importante teorema sobre la existencia de singularidades en el espacio-tiempo, descubierto por Hawking y Penrose (1970; cf. Hawking y Ellis 1973, p. 266).

Es ciertamente muy alentador oir a dos distinguidos hombres de ciencia invocar en un argumento estrictamente científico la premisa de que la libertad es un prerrequisito de la ciencia. Pero no hay que perder de vista que, de hecho, no tenemos la libertad de ejecutar cualquier experimento en cualquier parte en cualquier momento. Por eso, la física tiene siempre que extrapolar los resultados experimentales obtenidos en nuestros laboratorios terrestres a regiones espacio-temporales en que la experimentación libre es físicamente imposible. Tal extrapolación tiene que ser admisible, o la ciencia sería ilusoria. Por lo tanto, el argumento de Hawking y Ellis implica a lo sumo que *algunas* curvas temporaloides no son cerradas, y que éstas incluyen las cosmolíneas de los hombres de ciencia y sus instrumentos.[18] Por otra parte, conviene advertir que la existencia de curvas

---

18. En relación con esto, es oportuno recordar lo siguiente: Kurt Gödel (1949) descubrió una familia de soluciones de las ecuaciones de la Relatividad General que representan universos con curvas temporaloides cerradas; David Malament (1985) calculó la aceleración a que debe someterse un cuerpo en uno de estos universos de Gödel para que su cosmolínea sea una de esas curvas y comprobó que era tan grande que no podría soportarla ningún aparato de laboratorio, mucho menos un cuerpo humano.

temporaloides cerradas no es más adversa a la libertad humana que la existencia de una superficie de Cauchy en el espacio-tiempo, algo que Hawking y Ellis no parecen dispuestos a excluir a priori, aunque aceptan gustosos que "no parece haber ninguna razón físicamente convincente para creer que el universo admite" una superficie tal (1973, p. 206).[19]

Hacia 1900, Edmund Husserl abordó el tema de la intuición filosófica de un modo completamente distinto del kantiano, iniciando el movimiento llamado fenomenológico. Husserl sostenía que podemos captar los rasgos constitutivos de la "esencia" (*Wesen*) de los fenómenos independientemente de que las cosas aparentemente manifestadas por esos fenómenos existan efectivamente o no. Tal "visión de esencias" (*Wesenschau*) se puede lograr variando libremente en la imaginación los fenómenos efectivamente experimentados: los rasgos "esenciales" son justamente los que permanecen invariantes bajo la variación libre. El enfoque de Husserl ejerció mucha influencia sobre las "ciencias del espíritu" en Alemania y Europa central después de la primera guerra

---

19. Daré aquí una explicación concisa del importante concepto de *superficie de Cauchy*. Sea $\mathcal{M}$ un espacio-tiempo relativista (un modelo de la Teoría General de la Relatividad). Un camino temporaloide (nulo, espacialoide) en $\mathcal{M}$ es la imagen de una curva temporaloide (nula, espacialoide) en $\mathcal{M}$. Sea C un camino de una de las tres clases mencionadas. C es un *camino máximo* de su clase si C no forma parte de otro camino D de la misma clase. Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}$ un subespacio tridimensional que no es tangente en ningún punto a una curva temporaloide o nula. Decimos entonces que $\mathcal{S}$ es una hipersuperficie espacialoide. La hipersuperficie espacialoide $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}$ es una *superficie de Cauchy* si *cada* camino máximo temporaloide o nulo que hay en $\mathcal{M}$ corta $\mathcal{S}$ una sola vez. En virtud de las ecuaciones de campo de Einstein (4.7), si $\mathcal{M}$ contiene una superficie de Cauchy $\mathcal{S}$, los valores de la métrica y sus derivadas primeras y segundas en todos los puntos de $\mathcal{S}$ determinan la historia completa de $\mathcal{M}$ antes y después de $\mathcal{S}$. No hay que perder de vista, eso sí, que para estudiar empíricamente la geometría de $\mathcal{S}$ (y utilizarla para hacer predicciones infalibles), un observador tendría que estar situado "en el futuro" de *todos* los puntos de $\mathcal{S}$; en otras palabras, tendría que haber curvas nulas que vayan de cada uno de esos puntos hasta la cosmolínea del observador.

mundial y ahora está de moda en ciertos círculos académicos en Norteamérica, pero su efecto sobre la filosofía de la física ha sido insignificante. Sin embargo, es innegable que un olfato para tales rasgos invariantes de los fenómenos, lo que Husserl llamaba "el estilo invariante general que nuestro mundo intuitivo empírico exhibe persistentemente en el fluir de la experiencia total" ("den invarianten allgemeinen Stil, in dem [unsere empirisch anschauliche Welt] im Strömen der totalen Erfahrung verharrt"—Husserl 1954, p. 29) siempre ha sido un ingrediente decisivo del genio científico. Los hombres de ciencia que, como decía Max Born, "no tienen ningún instinto (*Gefühl*) para la verosimilitud intrínseca de una teoría"[20] rara vez han hecho contribuciones importantes a la filosofía natural. Evidentemente ese olfato instintivo no se desarrolla automáticamente al uno familiarizarse con los recursos matemáticos disponibles y los resultados experimentales alcanzados.

Permítaseme un ejemplo. Habitualmente se supone que el espacio-tiempo de un modelo cosmológico relativista físicamente viable tiene que ser temporalmente orientable. Dicho en jerga matemática: la variedad diferenciable tiene que admitir un campo liso global de vectores temporaloides. Este supuesto no se basa en la observación de hechos particulares, que nunca podría autorizar una generalización tan vasta, sino en la captación intuitiva de que todo suceso *S* tiene necesariamente un entorno dentro del cual los sucesos en el futuro de *S* se distinguen nítidamente de los sucesos en el pasado de *S*.[21] Con todo, no debemos confiarnos demasiado en nuestra captación de esencias. Sospecho que,

20. Carta de Born a Einstein, 25.8.1923 (Einstein y Born 1969, p. 117).

21. Sea dicho de paso, la orientabilidad temporal del espacio-tiempo no debe confundirse con la llamada asimetría temporal de ciertos procesos físicos. Esta última, ilustrada por ejemplo por la propagación del calor, no puede ni siquiera describirse si la orientabilidad temporal no se da por descontada, pues consiste en que cierto género de sucesos *A*, *B*, *C*, ocurren siempre de tal modo que que *C*

si no hubiéramos oído hablar de ciertas especulaciones físicas que envuelven espacio-tiempos múltiplemente conexos (cf. Wheeler 1962, Fuller y Wheeler 1962), todos daríamos por supuesto que cada punto del espacio-tiempo necesariamente posee un entorno bastante grande contraíble a él. Aunque estas especulaciones no parecen prometedoras, no son absurdas y no podemos declararlas físicamente imposibles sólo porque contrarían nuestro sentimiento de lo que es plausible. En estas materias, la historia de la recepción temprana y la eventual aceptación de la Teoría de la Relatividad de Einstein nos ha enseñado una lección difícil de olvidar: una teoría puede contradecir algunas de nuestras creencias más arraigadas sobre la naturaleza de las cosas y sin embargo avenirse mucho mejor con nuestras verdaderas intuiciones que la teoría que reemplaza.

Así, pues, ni el método de Kant ni el de Husserl procuran ideas filosóficas a prueba de fuego. Por otra parte, Es claro que si alguien está seguro de haber descubierto un requisito genuino del conocimiento científico o de haber captado un rasgo invariante del mundo, de todos modos juzgará que la ciencia tiene que ajustarse a este descubrimiento. La prueba más segura de tales ideas parece ser, no su evidencia, que puede ser engañosa, sino la posibilidad de articularlas en una teoría matemática que brinde un marco satisfactorio para entender los hechos. A fin de cuentas, como suele ocurrir en filosofía, nuestra reflexión no nos ha revelado nada que no supiéramos de antemano, pero ha esclarecido y confirmado lo que supimos siempre: sin teorías visionarias los hechos no pueden describirse de un modo coherente, mas sin hechos articulados teóricamente las ideas filosóficas no pueden certificar su idoneidad. El teorizar matemático, motivado por las ideas y los hechos, teje la red que los mantiene enlazados.

---

esté en el futuro de *B* cuando *A* está en su pasado y nunca ocurren en el orden inverso.

7

La geometría del universo

Expresiones como 'la geometría del universo' o 'la estructura geométrica del universo' adquirieron el significado que les damos hoy gracias a la teoría de la gravitación de Einstein, mejor conocida como Relatividad General. Esta fue la primera teoría de la física matemática capaz de encarar al universo como un objeto físico. Las soluciones cosmológicas a las ecuaciones del campo gravitacional einsteinianas propuestas por Einstein mismo (1917), Willem de Sitter (1917, 1917a, 1917b), Alexander Friedmann (1922, 1924) y Kurt Gödel (1948) nos autorizan a atribuirle una estructura geométrica al universo si se cumplen ciertas condiciones. Y es en virtud precisamente de esta atribución de una estructura geométrica al universo que éste se convierte, en el contexto de la Relatividad General, en un objeto de investigación científica bien circunscrito. La estructura geométrica, en el sentido aquí empleado, puede llamarse con más propiedad estructura cronogeométrica, en cuanto concierne primordialmente a las relaciones entre puntos-instantes —los llamados *eventos* o *eventos posibles*— en el espacio-tiempo, y sólo secundaria y derivadamente tiene que ver con las relaciones entre puntos permanentes en el espacio. La Relatividad General es una teoría geometrodinámica —mejor dicho, cronogeometrodinámica— de la gravitación. Por una parte, la clase más simple de cuerpos en caída libre —las partículas sin carga eléctrica y sin spin— trazan, sin que nada las constriña o las estorbe, las líneas más directas en el espacio-tiempo. Por otra parte, tales líneas no están dadas *a priori*, como en la cronogeometría minkowskiana de la Relatividad Especial, sino que dependen de la distribución de la materia y de la energía no-gravitacional.

Estas ideas asombrosas provienen de innovaciones radicales en la geometría introducidas durante el siglo XIX, especialmente por Bernhard Riemann. Hacia 1830, Lobachevski y Bolyai desarrollaron una geometría no-euclidiana, negando el Postulado V de Euclides. Mostraron que, si se supone que en el plano determinado por un punto *P* y una recta λ, pasa por *P más de una* recta que no corta λ, se obtiene un sistema de geometría con ciertos rasgos sorprendentes, pero no menos consistente que el sistema euclidiano. La diferencia entre la geometría euclidiana y la geometría lobachevskiana depende del comportamiento en el infinito de las rectas coplanares; pero se manifiesta también en interesantes propiedades de objetos más a mano. Así, es una característica distintiva de la geometría euclidiana que dos figuras planas o sólidas pueden tener la misma forma y distinto tamaño. Por consiguiente, en un espacio lobachevskiano no hay ni cubos ni cuadrados. Parecería, pues, que la geometría lobachevskiana no es más que un ejercicio académico, sin ninguna relevancia en el mundo que nos rodea. Pero los cubos y cuadrados que encontramos en nuestro ambiente son sólo aproximadamente cúbicos o cuadrados. ¿No pudiera ocurrir que a distancias astronómicas fuese imposible construir un cuadrilátero siquiera aproximadamente cuadrado? Lobachevski puso a prueba esta hipótesis midiendo los ángulos del triángulo formado por tres estrellas: Sirio, Rigel y la estrella Nº 39 de Eridano. Comprobó que, dentro del margen de error admisible, sumaban dos rectos, como prescribe el sistema euclidiano. Pero quedaba en pie la posibilidad de que a mayores distancias se registrara una diferencia significativa.

Riemann se percató de que las geometrías euclidiana y lobachevskiana no eran más que dos casos muy especiales entre las incontables estructuras geométricas que concebiblemente pudieran estar realizadas en el espacio. Pensó que eventualmente una geometría heterodoxa podría resultar más idónea que la euclidiana para la descripción de los fenómenos físicos, especialmente microfísicos. Con vistas a ello, propuso un marco amplísimo para la formulación de geometrías alternativas. La obra revolucionaria de Riemann descansa firmemente sobre otra revolución de la geometría, consumada dos siglos antes por Fermat y Descartes. El método de las coordenadas, introducido por estos dos matemáticos, representa puntos del espacio mediante tríos ordenados de números reales. Una figura como una elipse o una esfera es representada entonces por un conjunto apropiado de tríos de números que satisfacen ciertas ecuaciones. Así la geometría llega a gozar de las ventajas del álgebra y el análisis. El uso de coordenadas sugirió naturalmente la idea de espacios de más de tres dimensiones, cuyos puntos se representarían mediante cuádruplos, quíntuplos, o en general, *n*–tuplos ordenados de números reales. La idea surgió ya en el siglo XVII. A fines del siglo XVIII el gran matemático piamontés Lagrange representó un sistema mecánico con *n* grados de libertad como un punto en movimiento en un "espacio de configuración" de $n+1$ dimensiones (la dimensión adicional corresponde al tiempo). Ahora bien, importa recalcar que lo que hace que una colección de objetos representados por *n*–tuplos de números reales sea algo que uno puede razonablemente describir como "puntos" en un "espacio" *n*–dimensional no es el mero hecho de que cada uno de ellos viene rotulado con *n* coordenadas numéricas. Lo que de veras cuenta son las relaciones de vecindad que el conjunto de los *n*–tuplos de números reales (el producto cartesiano $\mathbb{R}^n$) hereda del cuerpo ordenado de los reales e induce a su vez en la susodicha colección de objetos.[1] Más aún, no es necesario que la colección completa esté representada en $\mathbb{R}^n$ por un sólo sistema de coordenadas. Para que una colección

1. La colección poseerá la topología más gruesa que hace de cada coordenada una función continua. Los conceptos de topología y de topología más gruesa se definen en el Vocabulario matemático, *s.v.* TOPOLOGÍA.

así merezca el nombre de “espacio” y se convierta en un objeto adecuado de investigación geométrica es suficiente (i) que todo elemento o “punto” de la colección tenga un entorno que algún sistema de coordenadas aplica inyectivamente en $\mathbb{R}^n$, y (ii) que cuando un mismo entorno está representado por dos o más sistemas de coordenadas, éstos se relacionen entre sí mediante funciones biyectivas continuamente diferenciables (“transformaciones de coordenadas”). Más que la mera continuidad, es menester la diferenciabilidad continua para que la geometría siga beneficiándose de la asistencia del análisis, como cualquier físico seguramente esperará que ocurra. Todo el “espacio” es representado entonces en $\mathbb{R}^n$ fraccionadamente o “por parches”, al modo como la tierra redonda se representa a pedazos en las páginas planas de un atlas. Pero el “espacio” entero bien puede no ser homeomórfico (es decir, topológicamente equivalente) a $\mathbb{R}^n$. Un “espacio” n–dimensional en este sentido es *grosso modo* lo que Riemann llamaba una magnitud n veces extensa, y que ahora llamamos una variedad diferenciable real de n dimensiones. Como un mapa plano puede a su vez aplicarse inyectivamente en $\mathbb{R}^2$, la analogía geográfica debe tomarse al pie de la letra: la superficie de la tierra es una variedad bidimensional, como lo es, en efecto, cualquier superficie lisa.

En la tercera década del siglo XIX Gauß realizó importantes estudios sobre la geometría de las superficies curvas. Hay, por cierto, relaciones cuantitativas bien definidas, por ejemplo, entre las longitudes de curvas, el tamaño de ángulos o el área de figuras trazadas, digamos, sobre la superficie de un huevo, o de una vasija, o de una silla de montar. El sistema de tales relaciones constituye la geometría de la superficie. Ahora bien, una superficie ordinaria en el espacio euclidiano hereda naturalmente su geometría de la geometría euclidiana del espacio, pero, contra lo que uno pudiera pensar de primera intención, la geometría de la superficie no depende del modo como ella está colocada en el espacio.

Por ejemplo, si enrollamos una página de papel impresa con figuras geométricas no alargamos las líneas, ni ampliamos los ángulos, ni agrandamos los polígonos marcados sobre la superficie. Gauß estableció un modo de caracterizar la geometría de una superficie *intrínsecamente*, esto es, sin apelar a ninguna relación entre puntos de la superficie y puntos del espacio ambiente. Para describirlo recurriré a la siguiente idea intuitiva. Pensemos en partículas que se se mueven sobre la superficie. Las velocidades de todas las partículas que pasan por un punto dado en todas las direcciones y con todos los grados de rapidez concebibles forman un espacio vectorial, el espacio bidimensional de vectores tangentes o *plano tangente* en ese punto. Gauß caracterizó la geometría de una superficie mediante un campo tensorial de rango 2, es decir, mediante una correspondencia que asigna a cada punto de la superficie una función bilineal sobre los vectores tangentes en ese punto. El lector no necesita saber qué es una función bilineal.[2] Basta que tenga presente que una función de esta clase asigna un número real a cada par ordenado de vectores en el punto respectivo, de tal suerte que los números asignados a los cuatro pares que pueden formarse con dos vectores linealmente independientes determinan el número asignado a cualquier otro par de vectores. El campo tensorial en cuestión se conoce como el tensor métrico o, sencillamente, la *métrica*. El tensor métrico es simétrico, lo cual quiere decir que el número correspondiente al par $\langle \mathbf{v},\mathbf{w} \rangle$ de vectores en un punto P es igual al asignado al par $\langle \mathbf{w},\mathbf{v} \rangle$. Es positivo definido, lo cual quiere decir que asigna un número positivo a cualquier par de la forma $\langle \mathbf{v},\mathbf{v} \rangle$, a menos que $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. La métrica a su vez determina un campo escalar —esto es, una función diferenciable con valores reales— sobre la superficie, el cual se llama la *curvatura gaussiana*. Sería tedioso definirla aquí. Señalaré sólo, a modo de ejem-

2. Doy una definición en el Vocabulario matemático, *s.v.* VECTORES Y TENSORES.

plo, que la curvatura gaussiana de un plano euclidiano, y por ende también de una superficie cilíndrica es constante, igual a cero; que la curvatura gaussiana de una superficie en la cual las líneas más directas —las llamadas geodésicas de la superficie— se comportan como rectas lobachevskianas es una constante menor que cero, y que la curvatura gaussiana de un huevo es un número positivo que varía suavemente de punto en punto.

Si consideramos, con Riemann, a cada superficie lisa como una variedad bidimensional, su teoría se nos presenta como una generalización bastante natural de los métodos de Gauß al caso *n*-dimensional. Dada una variedad *n*–dimensional $\mathcal{M}$, su geometría —es decir, el sistema de relaciones cuantitativas entre longitudes, áreas, volúmenes, hipervolúmenes, etc. en $\mathcal{M}$— debe definirse intrínsecamente, sin prestar atención alguna a una variedad de mayor número de dimensiones en la que $\mathcal{M}$ pueda estar empotrada. Una vez más, la geometría está definida por la métrica, un campo tensorial simétrico positivo definido de segundo rango. Dependiendo de la métrica, una variedad tridimensional puede ser euclidiana o lobachevskiana, o exhibir otra cualquiera de entre incontables geometrías alternativas. Cualquier geometría caracterizada de este modo por un campo tensorial simétrico positivo definido sobre una variedad *n*–dimensional es una geometría riemanniana. Lo que todas estas geometrías tienen en común es que son, por así decir, casi euclidianas en un pequeño entorno de cada punto. Más precisamente, en cualquier punto de la variedad una métrica de este tipo y la respectiva métrica euclidiana concuerdan hasta los diferenciales de primer orden, inclusive. Riemann contempló la posibilidad de otras geometrías que no cumplen esta condición. Sin embargo, en vista del éxito conocido de la geometría euclidiana, estimaba que la física haría bien en circunscribirse todavía por un tiempo a las casi euclídeas geometrías riemannianas. Riemann introdujo asímismo el análogo *n*-dimensional de la curvatura gaussiana. Pero éste no es un campo escalar (a menos, por cierto, que $n = 2$), sino un campo tensorial de rango 4, esto es, una correspondencia que asigna a cada punto de una variedad una función cuadrilineal sobre cuádruplos ordenados de vectores tangentes en ese punto, variando suavemente de punto en punto.[3] Este campo tensorial, conocido como el tensor de Riemann o tensor de curvatura de la variedad, está determinado por la métrica. Sea dicho de paso, cuando la Teoría de la Relatividad General atribuye una curvatura al espacio en presencia de fuentes gravitacionales, ello no quiere decir que el espacio esté curvado en un sentido intuitivo o, mejor dicho, contraintituivo, sino simplemente que en presencia de dichas fuentes el tensor de Riemann le asigna valores distintos de cero a ciertos cuádruplos ordenados de direcciones espaciales. La idea de que la geometría del espacio físico pudiera depender de las fuerzas de la naturaleza ya había sido expresada por Riemann. Como agudamente señala: "Los conceptos empíricos en que se fundan las determinaciones métricas del espacio, a saber, los conceptos de cuerpo sólido y de rayo de luz, pierden aparentemente su validez en lo infinitamente pequeño. Cabe pensar por lo tanto que las relaciones métricas del espacio en lo infinitamente pequeño no se ajustan a los supuestos de la geometría [tradicional], y esto es algo que, en efecto, habría que admitir si ello permitiese explicar los fenómenos de manera más simple" (1854, p. 149).

En septiembre de 1905, en un artículo titulado "Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento", Albert Einstein publicó los principios y algunas importantes consecuencias de la teoría que ahora se conoce como Relatividad Especial. Mostró allí cómo se podía reconciliar la perfecta equivalencia física de todos los sistemas de referencia inerciales, proclamada por Galileo y Newton, con las leyes de la electrodinámica clásica que, según se las entendía a la sazón,

---

3. Véase el Vocabulario matemático, *s.v.* VECTORES Y TENSORES.

aparentemente privilegiaban uno de entre esos sistemas. Esta apariencia nacía de que los físicos, al sustituir un sistema inercial de referencia por otro, transformaban las coordenadas de posición teniendo en cuenta el movimiento relativo de los sistemas, pero dejaban la coordenada tiempo inalterada. Einstein postuló la equivalencia de los sistemas inerciales y la validez de un principio simple y bien corroborado de la electrodinámica —a saber, que la velocidad de la luz en el vacío es la misma en todas partes y en todas direcciones y no depende de la velocidad de su fuente— y *derivó* de estos dos postulados una regla para la transformación de las coordenadas. Las transformaciones que obedecen a esta regla se llaman transformaciones de Lorentz o —en su forma más general— transformaciones de Poincaré, mientras que las transformaciones del tipo tradicional se llaman transformaciones de Galileo. Las leyes de la electrodinámica clásica permanecen invariantes bajo las transformaciones de Poincaré y así satisfacen la equivalencia de los sistemas inerciales de referencia según Einstein la entiende; pero las leyes de la mecánica clásica son invariantes bajo las transformaciones de Galileo y por lo tanto son incompatibles con dicha equivalencia. Einstein introdujo por eso profundos cambios en las leyes de la mecánica, tornándolas invariantes bajo las transformaciones de Poincaré. Las viejas y las nuevas leyes predicen prácticamente los mismos resultados para los experimentos mecánicos de baja energía en que se apoyaban tradicionalmente las primeras. Su notorio desacuerdo a niveles elevados de energía ha sido resuelto hace tiempo ya en favor de las últimas. De hecho, la Relatividad Especial, en cuanto ha sido incorporada a la Electrodinámica Cuántica, tiene el respaldo de los experimentos más precisos de la física, con un grado de aproximación que era inaudito cuando Einstein la propuso en 1905.

Pero en ese entonces la teoría mejor corroborada de la física era la Teoría de la Gravitación Universal de Newton, la cual, por cierto, es invariante bajo las transformaciones de

Galileo. En un artículo "Sobre la dinámica del electrón" publicado en 1906 Poincaré advirtió esta dificultad y bosquejó una teoría de la gravitación invariante bajo las transformaciones de Poincaré. Es posible que Einstein haya buscado también una teoría así por un corto tiempo, pero en diciembre de 1907 ya había llegado a la conclusión de que "en el marco de la Teoría de la Relatividad Especial no hay cabida para una teoría satisfactoria de la gravitación" (1949, p. 64). Esta conclusión es el fruto de una idea que tuvo un día sentado ante su escritorio en la Oficina de Patentes de Berna y que años más tarde llamará "der glücklichste Gedanke meines Lebens", "la idea más feliz de mi vida".[4] Se le ocurrió que si cayera libremente en un campo gravitacional uniforme no percibiría su propio peso. Hoy en día, a fuerza de ver astronautas levitando en televisión este hecho nos parece sumamente familiar. Pero a menos que hayamos estudiado la física relativista no solemos apreciar sus implicaciones. Einstein supo entenderlas y concluyó que un sistema de referencia en caída libre en un campo gravitacional uniforme es físicamente equivalente a un sistema inercial. Por lo tanto, ningún sistema de referencia en reposo en un campo gravitacional uniforme o con cualquier género de movimiento en un campo gravitacional no uniforme puede equivaler a un sistema inercial. Como en el mundo real ningún sistema gravitacional es uniforme, excepto aproximadamente y sobre una región pequeña, no existe nada que corresponda al concepto de un sistema inercial de referencia *global*.

La visión de Einstein pronto produjo dos predicciones importantes sobre los efectos ópticos de la gravitación,[5] pero sólo manifestaría toda su fecundidad combinada con una

4. Esta ocurrencia de Einstein es el tema del Capítulo 3.

5. A saber, el corrimiento del espectro con las variaciones del potencial gravitacional y el curvamiento de los rayos de luz en un campo gravitacional. Cf. Einstein 1907, § 19.

idea del matemático Minkowski, quien había sido profesor de Einstein en la Universidad Técnica Federal de Zürich. Minkowski mostró —también en 1907— que los rasgos aparentemente paradójicos de la Teoría de la Relatividad Especial resultan perfectamente naturales si la cinemática de la nueva teoría se concibe como la geometría de una variedad cuatridimensional dotada con una métrica cuasi-riemanniana.[6] Esta variedad, que Minkowski llamó *die Welt* —"el mundo"— se conoce comúnmente como espacio-tiempo de Minkowski. La métrica permite distinguir entre direcciones espaciales o "espacialoides" y direcciones temporales o "temporaloides" en la variedad. Ambas clases de direcciones están separadas en cada punto por un hipercono, el análogo tridimensional de la superficie de un cono que se extiende hasta el infinito a ambos lados del vértice (véase la fig. 7 en la p. 112). La historia de una partícula libre traza en el espacio-tiempo una línea que lleva una dirección fija del pasado al futuro: una geodésica temporaloide. Dije que la métrica del espacio-tiempo de Minkowski es cuasi-riemanniana porque no es positivo-definida: su acción sobre un cierto vector tangente (tomado dos veces) puede dar un número positivo o negativo, dependiendo de que el vector apunte en una dirección "espacialoide" o "temporaloide". Pero aparte de esta diferencia —ciertamente significativa— la métrica minkowskiana es como una métrica riemanniana, y en adelante la describiré como tal (como hago también en otros capítulos de este libro). Inicialmente, Einstein desdeñó la contribución de Minkowski como un mero formalismo, carente de genuino significado físico. Pero pronto debe haber sido seducido por su sencilla elegancia, pues en 1912 pudo percibir, a la luz de él, la notable analogía entre su propio

6. La conferencia que Minkowski dio en 1907 apareció impresa ocho años más tarde (Minkowski 1915). En 1908 publicó "Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körper" (Minkowski 1908) y dictó la célebre conferencia "Raum und Zeit" (Minkowski 1909).

enfoque de la gravitación y la teoría gaussiana de las superficies.[7] Como ya observé, la geometría de cualquier superficie lisa concuerda prácticamente con la geometría euclidiana del plano en un pequeño entorno de cada punto. Por eso, aunque Sevilla está edificada sobre la superficie curva de la tierra, el plano de la ciudad puede representarse fielmente en un trozo de papel cuadriculado. Análogamente, la cronogeometría del mundo concuerda prácticamente con la métrica minkowskiana en un pequeño entorno de cada evento. Por eso, los experimentos realizados en una nave espacial pueden referirse virtualmente indeformados a un sistema de referencia inercial local. Pero la tierra entera no puede envolverse ceñidamente con una sola hoja de papel cuadriculado. Tampoco puede el mundo, lleno como está de campos gravitacionales que atraen en direcciones contrarias, cubrirse con un sistema de referencia inercial global. Así como la llaneza local (aproximada) de la tierra explica el éxito de la geometría euclidiana entre los urbanistas, así también la inercialidad local (aproximada) de los sistemas de referencia en caída libre explica el éxito de la Relatividad Especial en la física de laboratorio.

Guiado por esta analogía y con el asesoramiento matemático de su amigo Marcel Grossmann, Einstein se dedicó durante los próximos años a desarrollar una teoría cronogeometrodinámica de la gravitación, en la cual las trayectorias espacio-temporales de los cuerpos en caída libre y los rayos de luz en el vacío estuviesen determinadas por la métrica del espacio-tiempo, y esta última dependiese de la distribución de la materia y la luz. Sus esfuerzos rindieron fruto cuando publicó, el 28 de noviembre de 1915, las ecuaciones de campo de la Relatividad General (Einstein 1915c; cf. 1915, 1915a, 1915b). Estas ecuaciones expresan la

7. Einstein narra esta ocurrencia en el prefacio para una edición checa de su “exposición popular” de la Teoría de la Relatividad (citado en el original alemán en Stachel 1989, p. 88, n. 3).

igualdad entre un campo tensorial que representa la distribución espacio-temporal de la energía no-gravitacional y cierta expresión tensorial construida a partir de la métrica del espacio-tiempo y sus derivadas primeras y segundas. Resolver las ecuaciones consiste en extraer la métrica de esta última expresión. Tales ecuaciones diferenciales de segundo orden sólo pueden resolverse exactamente bajo condiciones simplificadoras bastante extremas. Considérese, por ejemplo, la llamada solución de Schwarzschild para el espacio vacío, descubierta independientemente por Schwarzschild (1916) y Droste (1916), y que es la piedra angular de la nueva mecánica celeste. Se supone que el espacio-tiempo está completamente vacío, con una métrica esféricamente simétrica en el espacio. Esto implica que la métrica es estática (no cambia en el tiempo) y converge a la métrica minkowskiana en el infinito espacial. La solución depende de un parámetro *m* y está definida en todo $\mathbb{R}^4$ excepto (i) en la recta que representa el centro espacial de simetría y (ii) sobre el hipercilindro que representa una esfera espacial de radio 2*m* (si ponemos la constante gravitacional igual a 1). La segunda singularidad puede eliminarse mediante una adecuada transformación de coordenadas, pero la primera —en el centro espacial de simetría— es inerradicable. La solución representa razonablemente bien el campo gravitacional en el espacio vacío que rodea un cuerpo esférico de masa *m* enormemente alejado del cuerpo más próximo. Tómese entonces una partícula de prueba —esto es, un cuerpo tan pequeño que su presencia no afecta significativamente la métrica del espacio-tiempo— y colóquesela en cualquier punto del campo de Schwarzschild. La geodésica espacio-temporal que representa la historia de la partícula serpentea alrededor de la recta representativa del centro espacial de simetría, trazando algo así como una columna salomónica. La solución de Schwarzschild fue aplicada en el acto para ver si la teoría de Einstein daba cuenta del movimiento de Mercurio mejor que la teoría de Newton.

Para ello, se le asigna al parámetro *m* el valor de la masa del sol, se substraen de la trayectoria observada de Mercurio las perturbaciones atribuibles a la presencia de otros planetas, y se compara la trayectoria resultante con la geodésica trazada en el espacio-tiempo por una partícula de prueba cuya distancia inicial del centro espacial de simetría es igual a la distancia entre Mercurio y el centro del sol en un momento dado. El acuerdo obtenido es sorprendente, pues en las condiciones descritas el periastro de la partícula de prueba avanzaría en 43 segundos de arco por siglo, que es justamente lo que mide aquella parte de la precesión del perihelio de Mercurio que la teoría de Newton era incapaz de explicar (Einstein 1915b; véanse arriba, en el Capitulo 3, las notas 4 y 6).

Como dije al comienzo, Einstein publicó la primera solución cosmológica de sus ecuaciones de campo en 1917. No la produjo para dar cuenta de algún hecho empírico. Antes bien, uno de los dos datos astronómicos que aduce en su argumentación —a saber, que los cuerpos celestes se mueven con lentitud relativamente a otros cuerpos celestes— está en desacuerdo con los resultados de Slipher sobre el corrimiento Doppler de la luz procedente de nebulosas, que habían venido publicándose en reuniones y revistas científicas desde 1913.[8] La motivación de Einstein era, por así decir, filosófica. Estaba convencido de que una teoría geometrodinámica de la gravitación tiene que satisfacer lo

8. Slipher 1913, 1915, 1917. El otro dato astronómico aducido por Einstein es que las estrellas están distribuidas uniformemente en el espacio. Los astrónomos norteamericanos armados de sus nuevos telescopios de largo alcance pronto iban a probar que también este dato era falso; pero, para los efectos del argumento de Einstein lo mismo da invocar la distribución uniforme de las galaxias, o al menos, de los grupos o supergrupos de galaxias, que la astronomía observacional no ha desmentido. Aún después del descubrimiento de vastos "agujeros" intergalácticos en los años 80, Gérard de Vaucouleurs —antiguo adversario de la homogeneidad del universo— concedió a sus entre-

que él llamaba el Principio de Mach, con arreglo al cual "el campo [métrico] está determinado *exhaustivamente* (*restlos*—cursiva de Einstein) por las masas de los cuerpos" (Einstein 1918, p. 241). Según él lo interpreta, este principio implica que a una distancia muy grande de las fuentes masivas de gravitación la métrica no puede estar definida. Pero eso contradice abiertamente una de las condiciones de la solución de Schwarzschild, a saber, que la métrica en el espacio vacío en torno a una fuente esféricamente simétrica converge al límite minkowskiano en el infinito espacial. En ese momento, aún no se había demostrado que esta condición es una consecuencia de la simetría esférica y se la veía como un supuesto suplementario independiente. Con la colaboración del matemático Grommer, Einstein trató en vano de hallar "campos gravitacionales estáticos, centralmente simétricos, que degeneren [. . .] en el infinito" (1917, p. 146). Entonces se le ocurrió que la cuestión del comportamiento de la métrica en el infinito espacial se desvanecería si simplemente *no hubiera* infinito espacial. Vimos que una variedad *n*-dimensional no necesita ser globalmente homeomórfica a $\mathbb{R}^n$. Basta que un entorno de cada punto de la variedad cumpla este requisito de homeomorfismo. Por ejemplo, la esfera es globalmente homeomórfica a $\boldsymbol{S}^2$, el subespacio topológico de $\mathbb{R}^3$ formado por todos los triples $\langle x,y,z\rangle$ de números reales que cumplen la condición $x^2 + y^2 + z^2 = k^2$, para alguna constante k. Del mismo modo, hay variedades tridimensionales homeomórficas a $\boldsymbol{S}^3$, el subespacio topológico de $\mathbb{R}^4$ formado por todos los cuádruplos $\langle x,y,z,w\rangle$ de números reales que cumplen la condición $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = k^2$, para algún k. Digamos que una variedad así es una superesfera. Considérese un espacio-tiempo en que cada

vistadores Lightman y Brawer (1990, p. 96) que "si consideramos un volumen de mil o dos mil megaparsecs de diámetro la densidad media sería la misma que en cualquier otro volumen igual que no intersecte al primero". Véase también Peebles 1993, pp. 24-45, "Mapping the Galaxy Distribution".

sección espacial (representativa del espacio entero en un instante dado) es una superesfera. Obviamente, una superesfera, al igual que una esfera corriente, es topológicamente compacta, y hay una cota que las distancias entre sus puntos nunca sobrepasan. En un espacio-tiempo como el propuesto no cabe, pues, hablar de infinito espacial. Pensando en algo por el estilo, Einstein se puso a buscar una nueva solución de las ecuaciones de campo. Dando por descontado que, a gran escala, el mundo se ve en todo momento más o menos igual en cualquier dirección desde cualquier sitio, introdujo el postulado simplificador de que la materia está uniformemente distribuida en el espacio como un fluido inmóvil y sin presión. La solución que encontró requería una modificación de las ecuaciones originales. Esto suena a trampa, y el propio Einstein dirá más tarde que la modificación que introdujo en las ecuaciones de campo para obtener la solución cosmológica de 1917 había sido el error más grande de su vida. Pero en verdad la cosa no es tan fea como parece. Las ecuaciones de campo deben igualar el campo tensorial simétrico T_{ik}, de rango 2, representativo de la materia y la energía no gravitacional, con un campo tensorial simétrico del mismo tipo construido a partir de la métrica y sus primeras y segundas derivadas.[9] La conservación de la energía implica que la derivada covariante de T_{ik} es siempre igual a cero ($T^{ik}{}_{;k} = 0$). Las ecuaciones de campo de Einstein, en su versión original, llenan este requisito, pero no son el sistema de ecuaciones más general que cumple con él. Si reformulamos las ecuaciones originales en la forma

9. Las ecuaciones de campo deben concordar aproximadamente con la ecuación de Poisson en las situaciones que corroboran a la teoría de Newton. Por eso deben ser ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, a lo menos. Einstein estimó que, dada la imprecisión de los datos disponibles, era ocioso buscar ecuaciones de tercer o cuarto orden—las cuales, debo agregar, habrían sido aún más inmanejables, matemáticamente, que las ecuaciones de segundo orden que finalmente propuso.

$$E_{ik} = T_{ik} \tag{7.1}$$

(donde E_{ik} es un tensor construido a partir de la métrica que llamaré tensor de Einstein), la versión más general sería:

$$E_{ik} + \lambda g_{ik} = T_{ik} \tag{7.2}$$

donde λ es un parámetro conocido como la *constante cosmológica*, y g_{ik} es la métrica.[10] El sistema de ecuaciones (7.1) resulta del sistema (7.2) al poner $\lambda = 0$. Einstein postuló que λ tiene un valor muy pequeño y obtuvo una solución de las ecuaciones (7.2) en que cada sección espacial instantánea del mundo (técnicamente: cada hipersuperficie espacialoide perpendicular al flujo temporaloide de la materia estática) tiene en todo lugar la misma curvatura positiva (en la métrica inducida en tales secciones por la métrica del espacio-tiempo). Esto significa que dichas secciones espaciales son superesferas, de suerte que el espacio-tiempo, que se extiende infinitamente hacia el pasado y hacia el futuro es, topológicamente hablando, como la (hiper)superficie de un supercilindro (vale decir, es homeomórfico a $\mathbb{R} \times \boldsymbol{S}^3$). Como el espacio es finito en el universo estático de Einstein, no surge en él la cuestión del infinito espacial. Pero tampoco surge esa otra cuestión que afligía a las cosmologías finitistas desde la Antigüedad —en llegando al fin del mundo, ¿no podría alcanzar más allá con sólo estirar el brazo, o arrojar una lanza?[11]— porque el espacio del universo de Einstein no tiene fin. No es sorprendente, pues, que la solución cosmológica de Einstein a la versión revisada de las ecuaciones de campo fuese recibida como un progreso filosófico mayúsculo.

---

10. En el apéndice al final de este capítulo formulo las ecuaciones (7.1) y (7.2) de un modo más explícito. El sistema (7.1) equivale al sistema (5.2), comentado en las notas 20 y 21 del Capítulo 5.

11. *ἐν τῷ ἐσχάτῳ οἷον τῷ ἀπλανεῖ οὐρανῷ γενόμενος πότερον ἐκτείναμι ἂν τὴν χεῖρα μ tὴν ῥάβδον εἰς τὸ ἔξω μ οὔ;*—Arquitas de Tarento, 47 A 24 (Diels-Kranz).

Pero no calmó por mucho tiempo sus propias inquietudes filosóficas. Ese mismo año, el astrónomo holandés de Sitter (1917, 1917a, 1917b) produjo una solución de la versión revisada de las ecuaciones de campo para un universo completamente vacío (el cual constituye, por cierto, otro modo de obtener una distribución estática y homogénea de la materia). Dos partículas de prueba ubicadas en la misma sección espacial del espacio-tiempo de de Sitter se alejan la una de la otra con una velocidad que aumenta con su distancia mutua. Ahora bien, un universo vacío parecerá el colmo de la extravagancia científica, pero como aproximación a lo que efectivamente se observa a través del telescopio no es inferior al universo lleno de Einstein. Desde un punto de vista suficientemente elevado las propias galaxias pueden considerarse como partículas de prueba. Los resultados de Slipher, que revelaban una sorprendente preponderancia de corrimientos hacia el rojo en los espectros de las galaxias lejanas, podían entonces entenderse como una corroboración de la solución de de Sitter.

En 1922 y 1924 la revista alemana *Zeitschrift für Physik* publicó dos artículos por un tal Alexander Friedmann, un meteorólogo soviético, quien mostró que las soluciones cosmológicas de Einstein y de Sitter eran sólo dos casos límites de una familia indenumerable de soluciones exactas de las ecuaciones de campo. Friedmann deja que la constante cosmológica λ tome cualquier valor negativo, positivo o nulo. Retiene también el supuesto de Einstein de que la materia es un fluido sin presión, pero no le exige que además sea inmóvil. Introduce unas cuantas suposiciones geométricas que ahora sabemos que se justifican si (i) la historia global del universo se ve igual en todas direcciones desde el punto de vista de cualquier punto material, aunque su configuración momentánea se vea diferente en distintas épocas aun desde un mismo punto y (ii) el universo es establemente causal (lo que intuitivamente quiere decir que a nadie le ocurrirá en el futuro tropezar consigo mismo en el pasado, ni tampoco podría ocurrirle en caso de que la métrica espacio-temporal fuese un poquito diferente de lo que es). Las soluciones de Friedmann tienen algunos rasgos interesantes en común que procedo a resumir. Como al nivel de abstracción en que se considera al universo no se contemplan fuerzas no-gravitacionales, toda la materia está en caída libre. Por lo tanto, su flujo temporal describe geodésicas temporaloides.[12] Cualquiera de estas geodésicas, extendida lo más que se pueda, puede considerarse como la historia de vida de una partícula que no decae. La llamo una cosmolínea de Friedmann. Excepto en el caso especial de la solución de Einstein, las cosmolíneas de Friedmann se alejan mutuamente, o se acercan mutuamente, o primero se alejan y luego se acercan. En todas las soluciones de Friedmann las cosmolíneas de Friedmann cortan perpendicularmente una sucesión de hipersuperficies espacialoides, esto es, de variedades tridimensionales cada una de las cuales puede identificarse naturalmente con el espacio físico en un momento dado. Cada uno de estos espacios tiene en todas partes la misma curvatura riemanniana, pero los espacios sucesivos de una misma solución de Friedmann tienen, generalmente, distintas curvaturas. Sin embargo, si el espacio determinado por una cierta solución para un cierto momento tiene curvatura positiva, negativa, o cero, entonces todas los demás espacios momentáneos determinados por esa solución tienen una curvatura que es respectivamente positiva, negativa o cero. De modo pues que un espacio-tiempo de Friedmann es homeomórfico al espacio-tiempo de Minkowski —si sus espacios sucesivos tienen curvatura negativa o cero— o al espacio-tiempo hipercilíndrico de Einstein —si sus espacios sucesivos tienen curvatura positiva. Pero aunque la

12. Dicho en lenguaje técnico: el flujo —que es un campo vectorial— genera una congruencia de geodésicas temporaloides. (El concepto de congruencia de curvas se definió en el Capítulo 5, nota 27).

topología de los universos de Friedmann resulta familiar, su estructura afín —vale decir, su sistema de geodésicas— es asombrosa. Supongamos que vivimos en un típico universo de Friedmann en que las cosmolíneas de Friedmann se están alejando — ya sea para siempre, ya sea hasta un momento en que empezarán a acercarse. Retrocedamos en la imaginación a lo largo de una de ellas, que llamaré γ. Entonces, a medida que avanzamos hacia el pasado, segundo a segundo, año a año, todas las otras cosmolíneas de Friedmann convergen hacia γ, de modo que en todo entorno espacial de γ la densidad de la materia crece más y más, superando toda cota asignable cuando la longitud del tiempo que hemos retrocedido hacia el pasado alcanza cierto valor, digamos, quince mil millones de años. Por supuesto, la densidad de la materia no puede ser actualmente infinita en un punto del espacio-tiempo, pues entonces ni el tensor de energía ni la métrica estarían definidos en ese punto. Pero es claro que, si en un universo de Friedmann como el descrito, queremos asignarle números reales a los puntos pretéritos de cualquier cosmolínea de Friedmann, en conformidad con la separación temporal entre esos puntos, no podemos usar para eso a todo el cuerpo de los reales $\mathbb{R}$, sino sólo un intervalo abierto finito. Así, si elegimos una unidad de tiempo, le asignamos el tiempo 0 al momento actual y usamos los reales negativos para coordinatizar el pasado, el pasado entero de cada línea cósmica de Friedmann estará representado por un intervalo $(-t_0, 0)$. Podemos entonces llamar a t_0, como hizo Friedmann, "el tiempo trascurrido desde la creación del mundo". Pero no cabe pretender que $-t_0$ es la fecha de la creación. $-t_0$ es la cota inferior máxima del alcance de la coordenada tiempo utilizada, pero no puede ser la fecha de ningún suceso cósmico, pues un tal suceso sólo puede ocurrir en un punto en una cosmolínea de Friedmann y, por lo tanto, bajo los supuestos adoptados, tiene que llevar una fecha mayor que $-t_0$. Más aún, si b es el instante inicial de cualquier suceso que ocurre en un universo de Friedmann, siempre hay un lapso de tiempo que precede *b.* De este modo, gracias a la maravillosa idea de las variedades, que debemos a Riemann, la cosmología relativista puede concebir un universo con un pasado finito, pero que no tiene comienzo. Cabe hacer observaciones análogas sobre los puntos futuros de las cosmolíneas de Friedmann en un universo de Friedmann en que convergen. Técnicamente hablando, en el típico universo de Friedmann (aunque no en el universo estático de Einstein ni en el universo vacío de de Sitter), las cosmolíneas de Friedmann, parametrizadas por el tiempo, son geodésicas incompletas, y el espacio-tiempo es una variedad incompleta con respecto a geodésicas temporaloides. Por algún tiempo, los hombres de ciencia pensaron que este rasgo notable de las soluciones de Friedmann provenía de los supuestos drásticamente simplificadores en que se basan, pero que en las circunstancias más rudas de la vida real la incómoda incompletitud geodésica se evitaría. Así, de Sitter dijo en 1933 que "la concepción del universo que se contrae a un punto matemático en un instante particular del tiempo [. . .] debe [. . .] reemplazarse por la de un acercamiento muy próximo de todas las galaxias durante un corto lapso de tiempo" (de Sitter 1933, p. 631) Pero los teoremas de singularidad descubiertos por Penrose, Hawking y Geroch en los años 60 implican que, bajo hipótesis físicas muy generales y sumamente plausibles, cualquier universo relativista en que las cosmolíneas del flujo de la materia convergen en la dirección del pasado o en la dirección del futuro como en un típico universo de Friedmann es incompleto con respecto a geodésicas temporaloides.[13] En el Capítulo 2 se presentaron algunas de las razones que hay para pensar que efectivamente vivimos en un universo así.

13. Véanse las referencias en el Capitulo 2, nota 25. Se hallará una exposición sistemática de los teoremas de singularidad, con demostraciones y referencia detallada a los artículos originales en el tratado de Hawking y Ellis (1973). Cf. también Wald 1984, Capítulo 9.

APÉNDICE

Formularé aquí de un modo más explícito las ecuaciones (7.1) y (7.2). Sean g_{ik} y T_{ik}, al igual que arriba, la métrica espacio-temporal y el tensor de tensión y energía, respectivamente. Denotaré con g la determinante de los componentes métricos con respecto a las coordenadas. Conforme a la convención de Einstein, se sobreentiende la sumatoria sobre los índices repetidos (por ejemplo, $g^{ik}g_{hk} = \sum_{k=0}^{3} g^{ik}g_{hk}$). Represento la derivada de una función con respecto a la k-ésima coordenada añadiendo al término que designa a la función misma el subíndice k precedido de una coma; de acuerdo con esta convención, $g_{jh,k} = \partial g_{jh}/\partial x^k$. Los componentes de la conexión lineal determinada por la métrica se designan con Γ^i_{jk}, es decir, $\Gamma^i_{jk} = \tfrac{1}{2}g^{ik}(g_{jh,k} + g_{kh,j} - g_{jk,h})$, donde los índices i, j, h y k recorren el conjunto $\{0,1,2,3\}$. El tensor de Ricci está dado entonces por

$$R_{ik} = \tfrac{1}{2}(\log g)_{,ik} - \Gamma^s_{ik,s} + \Gamma^r_{is}\Gamma^s_{kr} - \tfrac{1}{2}\Gamma^s_{ik}(\log g)_{,s} \tag{7.4}$$

Con este simbolismo, la versión original de las ecuaciones de campo se escribe así:

$$R_{ik} = -\kappa(T_{ik} - \tfrac{1}{2}g_{ik}T^s{}_s) \tag{7.5}$$

donde la constante κ depende de las unidades adoptadas. Pero (7.5) equivale a:

$$R_{ik} - \tfrac{1}{2}g_{ik}R^s_s = -\kappa T_{ik} \tag{7.6}$$

Si ponemos $\kappa = -1$, (7.6) expresa las ecuaciones que di condensadamente en (7.1). La nueva versión de las ecuaciones de campo (Einstein 1917) se escribe en nuestro simbolismo así:

$$R_{ik} - \lambda g_{ik} = -\kappa(T_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} T_s^s) \qquad (7.7)$$

El sistema (7.7) equivale, por supuesto, a

$$R_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} R_s^s + \lambda g_{ik} = -\kappa T_{ik} \qquad (7.8)$$

que expresa lo mismo que (7.2).

8

La crítica de conceptos en las »revoluciones« de la física

> οὔτοι ἀπ' ἀρχῆς πάντα θεοὶ θνητοῖσ' ὑπέδειξαν,
> ἀλλὰ χρόνῳ ζητοῦντες ἐφευρίσκουσιν ἄμεινον.
>
> JENÓFANES, fr. 18 (DK)

Quiero referirme a un aspecto de las revoluciones científicas que Thomas S. Kuhn menciona en su famoso libro (1962, p. 88; cf. Kuhn 1964), pero al cual, en mi opinión, ni el mismo Kuhn, ni sus críticos y continuadores le han prestado suficiente atención. Me referiré únicamente a las grandes revoluciones de la física básica, esto es, a procesos históricos que han producido un cambio en los conceptos mismos que entran en la descripción de los fenómenos del movimiento y de los estados de los sistemas físicos. Me interesa destacar el papel decisivo que a veces ha desempeñado en tales procesos una crítica argumentativa directa de los conceptos que están siendo transformados o reemplazados. Creo que en varias ocasiones esta forma discursiva o "dialéctica" de crítica ha proporcionado buenas razones para abandonar el sistema conceptual generalmente aceptado y ha contribuido significativamente a precipitar el desarrollo de otro sistema nuevo. Sería interesante saber si la crítica de conceptos ha desempeñado un papel comparable en otras ramas de la ciencia y en revoluciones menores; pero ésta es una cuestión que no puedo abordar aquí.

Es claro que cambios tan radicales como los que me propongo considerar, que afectan los elementos básicos de nuestra reconstrucción racional de la naturaleza, no pueden estar ocurriendo todo el tiempo, so pena de que la investigación científica quede completamente desorientada en su quehacer cotidiano. Con todo, un hecho notable —y todavía imperfectamente comprendido— de la historia contemporánea fue que tres revoluciones mayores de esta clase ocurrieron en el primer cuarto del siglo XX. Me refiero al advenimiento de la Relatividad Especial en 1905, la Relatividad General en 1915 y la Mecánica Cuántica en 1925. La cercanía de esos acontecimientos hace que nos cueste mucho creer que la meta de la física sea la representación adecuada de una verdad trascendente determinada de antemano, a menos que estemos dispuestos a suscribir también la conclusión escéptica de que nunca sabremos decir cuán lejos estamos de alcanzar dicha meta o cuán bien estamos progresando hacia ella. Pues si cada sistema conceptual revolucionario de la física es susceptible de ser barrido por el próximo, ni siquiera podemos anticipar los términos que serán apropiados para dar una representación adecuada de la verdad trascendente. Pero la reiteración de las revoluciones científicas presenta un difícil problema filosófico también para quienes no nos entregamos a las fantasías del realismo. Aun si estamos dispuestos a evaluar la marcha de la ciencia puramente desde dentro, a la luz de su propio desarrollo pasado y prospectivo, parece imposible establecer una comparación entre sistemas conceptuales alternativos que sea epistémicamente válida y por lo tanto nos permita apreciar el adelanto del conocimiento debido a una revolución científica mayor. La causa de esta aparente imposibilidad puede sumariamente expresar así: La observación de los hechos, reconocida hasta ahora como el tribunal de última instancia para dirimir disputas en la ciencia, no puede ser llamada a elegir entre dos sistemas conceptuales si la descripción misma de los hechos observados envuelve la aplicación de dichos sistemas; como ocurre en efecto si los conceptos en cuestión incluyen las categorías básicas de la cinemática y otros predicados fundamentales de los sistemas físicos.

Contrarrestando la ofensiva del sensualismo moderno, Kant afirmó incondicionalmente que hacían falta conceptos y una urdimbre intelectual para meramente tener una experiencia. "Anschauungen ohne Begriffe sind blind", dijo; "la conciencia sensible sin conceptos es ciega". En todo caso, es muda, pues para poder *decir lo* que se siente hay que sentirlo *como* algo, esto es, hay que subsumir la intuición particular bajo un concepto general. Sin embargo, Kant no tuvo que enfrentar la dificultad arriba descrita, pues creía que todos los conceptos de que disponemos para "deletrear las apariencias sensibles a fin de poderlas leer como experiencia" caen bajo un sistema permanente de "categorías" del entendimiento humano, las cuales, además, al aplicarse a las "formas" fijas de nuestra sensibilidad —a saber, el espacio euclídeo y el tiempo newtoniano— dan un conjunto de "principios" —equivalentes a los supuestos esenciales de la física clásica— a los cuales, según Kant, estamos perpetuamente sujetos por la naturaleza invariable de nuestra razón. Así, para Kant, en el plano fundamental en que surge dicha dificultad nunca podría ocurrir un cambio en los conceptos. Asi pues, los principios de la cinemática y la dinámica de Newton constituían un patrimonio inalienable. La idoneidad de los nuevos conceptos científicos y la validez de cualquier hipótesis en que figuren podrían siempre juzgarse a la luz de la experiencia ordenada por las "categorías" conforme a los correspondientes "principios".

El caso es que ni uno solo de los principios de Kant sobrevivió a las revoluciones de la física arriba mencionadas. La ciencia actual no se somete a la geometría euclidiana, la cronometría newtoniana, la continuidad de las cantidades intensivas, la conservación de la materia, el estricto determinismo causal o la interacción instantánea a distancia. Todavía podríamos rescatar la doctrina de Kant, renunciando a los detalles de su esquema categorial pero reteniendo sus rasgos más generales, aún incuestionados. Pero tal intento suscita cuando menos dos dudas: El esquema kantiano purgado de sus rasgos newtonianos ¿no se torna demasiado abstracto para que preste utilidad por sí mismo —sin aditamentos y especificaciones— en la constitución de la experiencia? Y si aún es lo bastante rico como para ser útil ¿qué garantía hay de que la próxima revolución científica no barrerá con él?

Pero no voy a especular aquí sobre una posible resurrección del kantismo. He evocado a Kant sólo porque supo reconocer la función de la estructura conceptual básica de la experiencia y porque, gracias a sus análisis, podemos apreciar en todo su dramatismo el hecho, patente ahora, de que dicha estructura es mutable. Cabe incluso sostener que las implicaciones epistemológicas del cambio radical de los conceptos en la física no se advirtieron antes, inmediatamente después del advenimiento de la Relatividad y la Mecánica Cuántica, debido a la general desconfianza hacia el enfoque kantiano causada por la influencia preponderante del empirismo lógico. Los autores de esa escuela solían citar la Relatividad como prueba de que la ciencia debe todo su contenido cognoscitivo a la observación sola, y de que la urdimbre no empírica de las descripciones científicas, lejos de ser la expresión de la eterna razón humana, es fruto de un acuerdo libremente estipulado por motivos de conveniencia. La supuesta dualidad de hechos observados y convenciones acordadas se manifestó en la etapa madura final del empirismo lógico en el conocido distingo entre los términos teóricos y los términos observacionales del vocabulario científico, el cual sirvió para trivializar el problema del cambio de conceptos en la física. Si un término es observacional ha de ser posible "bajo circunstancias apropiadas, decidir mediante la observación directa si es o no aplicable a una situación dada" (Hempel 1965, p. 178). Términos teóricos son aquellos que no satisfacen este requisito. Un término teórico obtiene su significado físico cabal por "interpretación parcial" en el vocabulario observacional, esto es, por la estipulación de que ciertas oraciones en que figura son verdaderas si y sólo si son verdaderas ciertas otras oraciones en que no figura ningún término que no sea observacional. Entre los términos teóricos se contaban naturalmente expresiones tales como *tiempo propio, curvatura del espacio-tiempo, operador hamiltoniano, corriente de probabilidad,* que han sido los vehículos del cambio conceptual en la física del siglo XX. Aunque, hasta donde sé, nadie ha pretendido que los vocablos observacionales tengan una forma o significado fijos para siempre, se sobreentendía que permanecerían incólumes a través de todos los cambios en el vocabulario teórico. Al fin y al cabo, ¿quién querría modificar el alcance de términos que están dotados ya de su propio infalible criterio de decisión? La estabilidad del vocabulario observacional en los períodos revolucionarios de la ciencia aseguraría entonces, a través de la interpretación parcial de los vocablos teóricos, la posibilidad de comparar los asertos de teorías sucesivas y de contrastarlos con los hechos observados.

Hoy por hoy estamos casi todos de acuerdo en que una tal clasificación del vocabulario científico en teórico y observacional es impracticable. No hay predicados empíricos decidibles, términos bajo los cuales los fenómenos, se clasifiquen automáticamente con sólo contemplarlos,. Además, la creencia de que el vocabulario peculiar de una teoría física obtiene su significado por "interpretación parcial" en términos de palabras corrientes que ordinariamente pasarían por "observacionales" contraría una de las tendencias características de la física moderna. Desde sus comienzos en el siglo XVII, sus creadores han desconfiado de los conceptos y juicios del sentido común, y han aceptado el lenguaje cotidiano como un medio útil para describir los objetos que estudiaban sólo bajo la condición de que el mismo se sometiese en última instancia a la jurisdicción y control del discurso científico, expresado en la terminología artificial en uso. Ningún vocabulario compartido de "términos observacionales" puede, entonces, salvar el abismo entre sistemas diferentes de conceptos físicos fundamentales.

Se entiende fácilmente que Paul Feyerabend y Norwood Russell Hanson, que combatieron antes que nadie el distingo entre términos teóricos y observacionales de la ciencia, fueran también los primeros en sostener que los diversos sistemas conceptuales básicos de la física son mutuamente incomparables o “inconmensurables”. Hay un sentido en que tenían toda la razón, pues tales sistemas, para cumplir su cometido, debieran ser autónomos y autosuficientes como un sistema categorial kantiano. Sin embargo, la historia reciente de la física, a pesar de sus grandes vicisitudes, no presenta cortes tan profundos como sugiere la voz ‘inconmensurable’. Si la Relatividad y la Física Cuántica fuesen completamente ajenas, en su urdimbre conceptual, a la mecánica y la electrodinámica clásicas, no se entendería por qué los físicos juzgan necesario instruir a sus discípulos en estas dos teorías para que ganen acceso a aquéllas. Adviértase que son ante todo los *conceptos* de las teorías clásicas lo que el estudiante tiene que dominar para que las contemporáneas se le tornen comprensibles. En otras palabras, se le enseña a analizar situaciones experimentales con arreglo a la física clásica a fin de que aprenda a concebirlas de otra manera. Esta curiosa combinación de continuidad y discontinuidad en la historia de la física, la sucesión de sistemas intelectuales independientes y mutuamente incompatibles que sin embargo se articulan en una unidad viva, resulta comprensible e incluso natural si tenemos en cuenta que cada revolución conceptual de la física moderna fue llevada a cabo por personas profundamente compenetradas del modo de pensar que eventualmente abandonaron, que sus innovaciones nacieron de sus perplejidades, que cada nuevo sistema conceptual, al surgir —por autocrítica— del antiguo, lo supera preservándolo. Tal preservación toma en cada caso una forma distinta y merece por lo tanto un estudio detenido; pero de todas maneras explica el uso persistente de los viejos modos de pensar como preparación didáctica para los nuevos. Cuando una crítica inmanente lleva al reemplazo de un esquema conceptual por otro, el vínculo que se establece entre ellos puede servir también para conectar el segundo, a través del primero, con las formas de pensamiento de la vida cotidiana, de que los sucesivos sistemas intelectuales de la física se han apartado cada vez más. Más significativo tal vez desde la perspectiva que adoptamos aquí es el hecho de que, cuando una nueva manera de pensar resulta de una *revisión y reforma* de los conceptos básicos, el problema que suscita su real o pretendida inconmensurabilidad con la manera de pensar anterior queda automáticamente resuelto. No hay nada que *elegir* entre lo viejo y lo nuevo si la sola existencia de lo nuevo supone un reconocimiento de las fallas de lo viejo. Si el sistema anterior queda descalificado por la misma autocrítica que finalmente da a luz el nuevo, no hace falta *comparar los* sistemas rivales: el nuevo se impone con sólo entenderlo.

La Jornada Primera del *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* de Galileo contiene un ejemplo muy claro de desalojamiento de una teoría mediante la crítica de sus conceptos. Como es sabido, la cosmología de Aristóteles depende esencialmente de su doctrina sobre el movimiento natural de los elementos. Por ser simples, los elementos han de moverse de un modo simple, a menos que un agente externo los fuerce a moverse de otro modo. Aristóteles reconoce dos clases de movimiento local simple, correspondientes a las dos clases de línea simple de que, según él, toda trayectoria se compone, a saber, la recta y el círculo. Como los cuatro elementos conocidos, la tierra, el agua, el aire y el fuego, se mueven naturalmente en línea recta desde o hacia un punto determinado, Aristóteles concluye que tiene que haber un quinto elemento que se mueva naturalmente en círculos en torno a ese mismo punto *(De Caelo*, I, ii-iii; especialmente, 268b11 y ss., 269a2 y ss., 270b27 y ss.). Este es el elemento de que están hechos los cielos y el punto en cuestión es, por lo tanto, el centro del universo. En esto se funda la separación aristotélica entre la física celeste y la física terrestre. Como hace decir Galileo a su portavoz Salviati: "Esta es la primera piedra, base y fundamento de toda la fábrica del mundo aristotélico" (Galileo, EN, VII, 42). Ahora bien, aunque concedamos las premisas, la conclusión de Aristóteles no se sigue, pues, como Sagredo agudamente señala, "si el movimiento recto es simple debido a la simplicidad de la línea recta, y si el movimiento simple es natural, entonces, en cualquier dirección que se efectúe, digo hacia arriba, hacia abajo, para adelante, para atrás, a la derecha, a la izquierda, o en cualquier otra que se pueda imaginar, con tal que sea recto, habrá de ser apropiado a algún cuerpo natural simple; o de lo contrario la suposición de Aristóteles es defectuosa" (EN, VII, 40). Asimismo, cualquier movimiento circular es simple, no importa cuál sea su centro. "En el universo puede haber mil movimientos circulares, y en consecuencia mil centros", que definen otros "mil movimientos hacia arriba y hacia abajo" (EN, VII, 40). Salviati va aún más lejos: "Como el movimiento recto es por su misma naturaleza infinito, porque la línea recta es infinita e indeterminada, es imposible que ningún móvil tenga por naturaleza el principio de moverse en línea recta, esto es, hacia donde no es posible llegar, no habiendo un término predeterminado; pues la naturaleza, como bien dice el mismo Aristóteles, no emprende lo imposible" (EN, VII, 40). "Por lo tanto, sólo el movimiento circular puede convenir naturalmente a los cuerpos naturales que integran el universo y están ordenados en la disposición óptima; y del recto lo más que se puede decir es que la naturaleza lo asigna a sus cuerpos y a las partes de los mismos cada vez que se encuentran fuera de su lugar, dispuestos de mala manera, y por ende necesitados de retornar a la brevedad posible al estado natural" (EN, VII, 56). Evidentemente, el movimiento circular propio de los cuerpos naturales en un mundo bien ordenado ocurrirá en torno a múltiples centros. Aunque la física copernicana que Galileo buscaba establecer se edificó en definitiva sobre la base de la primacía del movimiento rectilíneo, no circular, la física y la cosmología aristotélicas no pudieron sobrevivir a la crítica inmanente puesta en boca de Sagredo y Salviati en estos y otros pasajes del *Dialogo.* Pues, como dice Salviati, "donde quiera que se descubra una falla en lo hasta aquí establecido, se podrá razonablemente dudar de todo lo demás que está construido sobre ello" (EN, VII, 42). No es sorprendente, pues, que la publicación del libro de Galileo en 1632 haya tenido un efecto tan devastador sobre el aristotelismo.

Quizás el ejemplo más nítido de crítica conceptual que desemboca en una revolución científica sea la reforma del concepto clásico de tiempo por Einstein en el §1 de su artículo "Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento" (1905a). Para entenderlo bien hay que tener presente que la cinemática que le enseñaron a fines del siglo XIX no era ya la de los *Principios* de Newton, basada supuestamente en un espacio y un tiempo absolutos e inaccesibles, sino más bien la versión revisada de la misma, propuesta por Carl Neumann en su lección inaugural de 1869, "Sobre los principios de la teoría galileo-newtoniana" (Neumann 1870), y perfeccionada por James Thomson (1885) y Ludwig Lange (1885). Neumann y sus continuadores desarrollaron el concepto de un marco inercial de referencia, que constituye el punto de partida de Einstein. En rigor, la definición de Lange de un marco inercial —equivalente, sea dicho de paso, a la de Thomson—sirve mucho mejor a los propósitos de Einstein que la que éste mismo nos ofrece.[1] Lange define un "sistema inercial" como un marco de referencia en cuyo espacio relativo tres partículas libres proyectadas desde un punto en direcciones linealmente in-

1. Einstein caracteriza su "sistema en reposo", como "un sistema de coordenadas [. . .] en el cual valen las ecuaciones de la mecánica newtoniana" (1905a, p. 892), una condición incompatible con los resultados de su mismo trabajo.

dependientes describen trayectorias rectilíneas. Siguiendo a Neumann, Lange define asimismo una "escala de tiempo inercial", esto es, una coordenada temporal adaptada a un tal marco inercial, de la manera siguiente: Una partícula libre que se mueve en el espacio respectivo atraviesa distancias iguales en tiempos iguales, cuando el tiempo se mide conforme a la escala en cuestión. Relativamente a un marco inercial dotado de una escala de tiempo inercial, cabe postular el Principio de Inercia como una ley natural empíricamente controlable: *Una partícula libre* —distinta de las empleadas como patrones en las definiciones precedentes— *se mueve con velocidad constante en línea recta* (a menos que esté en reposo en el marco referencial). Lo que nadie parece haber percibido hasta que Einstein lo puso en evidencia es que la definición de escala de tiempo inercial de Neumann y Lange es irremisiblemente ambigua. Si t es una tal coordenada temporal adaptada a un marco de referencia inercial R, y x, y, z son coordenadas cartesianas del espacio relativo de R, entonces cualquier función lineal $t' = at + bx + cy + dz + k$ es también una escala de tiempo inercial adaptada a R (Para evitar velocidades infinitas basta imponer una modesta restricción a los parámetros b, c y d). Einstein superó esta ambigüedad con su célebre definición del tiempo mediante señales de radar emitidas desde una fuente en reposo en el marco inercial elegido (que expliqué en el Capítulo 4, nota 8). Ella nos proporciona una coordenada temporal perfectamente determinada una vez que se fija el cero y la unidad de medida: el tiempo einsteiniano del referencial. Relativamente a un marco inercial dotado de tiempo einsteiniano, cabe postular el Principio de la Constancia de la Velocidad de la Luz como una ley natural empíricamente controlable: Una señal *luminosa* —distinta de las empleadas como patrones en la definición precedente— *se propaga en el vacío con la misma velocidad constante, cualquiera que sea el estado de movimiento de la fuente emisora*. El Principio de Relatividad de Einstein dice que las leyes de la física toman la misma forma cuando se las refiere a cualquier sistema de coordenadas adaptado a un marco inercial y formado con coordenadas cartesianas para el espacio y una coordenada einsteiniana para el tiempo. La aseveración conjunta de los Principios de Relatividad y de la Constancia de la Velocidad de la Luz implica que toda transformación de coordenadas entre sistemas de la clase descrita pertenece al grupo de Poincaré. Entre las muchas consecuencias revolucionarias de este resultado, mencionaré una sola: dos tiempos einsteinianos adaptados a marcos inerciales en movimiento el uno respecto del otro, no determinan el mismo orden temporal del universo. Ello, por cierto, es totalmente incompatible con la física de Newton.

El ejemplo que acabo de esbozar sugiere unas cuantas observaciones de alcance más general. En primer lugar, permítaseme recordar que, aunque la ambigüedad de la definicion de escala de tiempo inercial de Neumann y Lange parece un defecto conceptual gravísimo, carecía de toda consecuencia práctica antes del advenimiento a fines del siglo XIX de las partículas de alta velocidad y la óptica de alta precisión Pues, como demostró Eddington (1924, p. 15), bajo los supuestos de la Relatividad Especial el tiempo einsteiniano adaptado a un dado marco inercial concuerda casi exactamente con la coordenada temporal definida por el metodo tradicional y obvio de transporte muy lento de relojes en ese marco, y dos coordenadas temporales de este tipo adaptadas a dos marcos inerciales distintos no difieren significativamente en una region pequeña si los marcos en cuestión se mueven el uno respecto del otro a una velocidad mucho menor que la de la luz. Esto nos ayuda a entender por qué la crítica de Einstein no fue formulada antes. En general, aunque un sistema conceptual de la física posea defectos ocultos o patentes, los físicos no lo criticarán por un loco afán de perfección intelectual, sino sólo cuando la propia praxis de la investigacion científica demande conceptos mejores. Pues son los conceptos *en uso,* empleados en el diseño y la interpretación de experimentos, los que constituyen la urdimbre viva del pensamiento físico.

En segundo lugar, vale la pena señalar que la ambigüedad del tiempo inercial de Neumann y Lange puede corregirse, sin renunciar a la sustancia de la teoría newtoniana, postulando que la velocidad de propagación de las señales no tiene una cota superior. Si no hay tal cota, entonces los otros supuestos de la Relatividad Especial implican que el tiempo definido por transporte infinitamente lento de relojes en un marco inercial será el mismo para todos los marcos inerciales. Los sistemas de coordenadas que constan de esta coordenada temporal y de coordenadas cartesianas adaptadas a distintos marcos inerciales se relacionan entre sí mediante transformaciones del llamado grupo de Galileo, que dejan invariantes a las leyes de Newton. Ahora se acostumbra a incluir en las presentaciones formales de la mecánica newtoniana un postulado que asevera que la velocidad de las señales no tiene una cota superior, o que el grupo de simetría de la naturaleza es el grupo de Galileo. Pero tales postulados no se le ocurrieron a nadie antes de que se conociera la obra de Einstein, y suponen una reformulación de la mecánica newtoniana según el modo de pensar relativista. De hecho, esos postulados pueden someterse a control experimental, brindando así un medio —sujeto naturalmente al esquema categorial de la Relatividad— para evaluar empíricamente las leyes newtonianas en comparación con las relativistas. Ello ilustra un efecto posible de la crítica de conceptos, a saber, que la teoría criticada no se descarte de plano, sino que se corrija de modo que se vuelva "conmensurable" con la teoría llamada a reemplazarla.

Un ejemplo aún más elocuente de este efecto es la reformulación por Élie Cartan de la teoría de la gravitación de Newton como la teoría de un espacio-tiempo curvo, en que la conexión lineal y por ende la curvatura están determinadas por la distribución de la materia, y las partículas de prueba en caída libre trazan geodésicas espaciotemporales

(Cartan 1923/24/25; cf. Havas 1964). En esta teoría, la inercia y la susceptibilidad a la gravitación son idénticas *de iure y* no sólo *de facto* como en la versión original de Newton. Así se corrige el principal defecto conceptual que Einstein señaló en esta última (según veremos más adelante). Y por cierto, si la teoría de la gravitación de Newton se formula así en el idioma geocronométrico de la Relatividad General, es ridículo pretender que ella es "inconmensurable" con la teoría de Einstein.

Debo subrayar además que las consideraciones anteriores no presuponen que Einstein haya llegado de hecho a su concepción de la Relatividad Especial por la vía de la critica conceptual que antepuso a su primera exposición de la misma. Para establecer un nexo entre un cierto modo de pensar y su sucesor la crítica de conceptos no tiene que desempeñar un papel en la génesis histórica de este último. Bien puede suceder que se la proponga después de que el cambio conceptual ha tenido lugar, como una razón para aceptarlo. Para recuperar la continuidad racional de la tradición científica basta que nosotros, sus herederos y portadores, seamos capaces de hallar argumentos críticos que nos permitan soldar las rupturas generadas por las revoluciones científicas; no es menester que tales argumentos se hayan presentado en el momento mismo en que las revoluciones ocurrieron.

Consideraciones conceptuales guiaron también a Einstein en el arduo camino de la Relatividad Especial a la General. Como le dijo en 1913 a la 85ª asamblea de científicos alemanes, los fenómenos gravitacionales conocidos a la sazón no justificaban que se modificara la teoría newtoniana, distinguida entre todas las teorías físicas por el éxito extraordinario de sus predicciones. Lo que hacía imperativo revisarla, al menos a juicio de Einstein, era el conflicto entre ella y la Teoría de la Relatividad Especial. Para darle una orientación definida a su búsqueda de una nueva teoría de la gravitación, Einstein se concentró en una dificultad conceptual que afectaba a la teoría newtoniana desde su nacimiento, aunque no parece haberle preocupado a nadie antes del advenimiento de la Relatividad Especial. Si expresamos la fuerza gravitacional newtoniana sobre un cuerpo dado utilizando la ley newtoniana de la gravitación, por un lado, y la segunda ley newtoniana del movimiento, por otro, obtenemos la ecuación (3.1), en que la masa del cuerpo figura como factor en ambos lados.

$$m(\mathrm{d}^2\mathbf{r}/\mathrm{d}\mathbf{r}^2) = -m\mathrm{G}\mathbf{r}/|\mathbf{r}|\mathbf{r}^2 \qquad (3.1)$$

Ello explica que la fuerza gravitacional ejercida sobre distintos cuerpos en un mismo lugar les imprima a todos exactamente la misma aceleración, aun cuando su valor—medido con un dinamómetro— puede diferir muchísimo de un cuerpo a otro. Lo que queda inexplicado, empero, es que la masa de un cuerpo tenga esta doble función de susceptibilidad a la atracción gravitacional o "carga" gravitatoria, por una parte, y de resistencia a dicha atracción o inercia, por otra. La reforma relativista del concepto clásico de inercia hizo que pareciera verosímil, en un momento, que la masa newtoniana bifronte se desdoblaría. Planck, por ejemplo, estimaba muy improbable que la radiación térmica en una cavidad vacía rodeada de paredes reflectantes tuviese peso. Pero entonces—concluía Planck—como tal radiación térmica "ciertamente posee una masa inercial [. . .], la identidad generalmente presupuesta entre masa inercial y masa ponderable, confirmada hasta aquí por todos los experimentos, queda obviamente destruida" (1907, p. 544). Sin embargo, Einstein basó sus especulaciones sobre la gravitación justamente en dicha identidad. Convencido de que "la ciencia tiene pleno derecho a asignar [. . .] una igualdad numérica sólo una vez que dicha igualdad numérica ha sido reducida a una igualdad de la naturaleza real de los dos conceptos" en juego (Einstein 1956, pp. 56s.), se puso a buscar una teoría de la gravitación en que la equiparación cuantitativa de la masa inercial y la ponderable no fuera sólo, como en la teoría de Newton, la aseveración idealizada de una coincidencia observable, sino que resultase de su identidad conceptual. En el caso de los campos gravitacionales uniformes, la identidad de inercia y gravedad fluye del Principio de Equivalencia que Einstein introdujo en 1907. Este principio extiende a todas las leyes físicas el alcance del Sexto Corolario a las Leyes del Movimiento de Newton, tal como el Principio de Relatividad einsteiniano de 1905 generalizó el alcance del Quinto Corolario. En su formulación inicial, el Principio de Equivalencia postulaba la perfecta equivalencia física de un marco de referencia en reposo en un campo gravitacional uniforme representable por un vector $\mathbf{g}$ con un marco de referencia que se mueve respecto de un marco inercial con aceleración constante igual a $-\mathbf{g}$. Pero esto a su vez implica que un marco en caída libre en un campo gravitacional uniforme no se distingue internamente de un marco inercial. Claro está que en el mundo real los campos gravitacionales son sólo aproximadamente uniformes dentro de regiones pequeñas. Para establecer la identidad entre inercia y gravedad también cuando esta última responde a los campos no uniformes existentes en realidad, Einstein recurrió a la interpretación geométrica de la Relatividad Especial propuesta por Minkowski. hacia la cual, en un principio, había mostrado escasa simpatía. Minkowski probó que la Relatividad Especial trata en efecto la escena del acontecer físico —el espacio-tiempo— como si fuese una variedad riemanniana de cuatro dimensiones con métrica plana indefinida, en que las partículas libres describen cosmolíneas geodésicas (véase el Capítulo 2). El Principio de Equivalencia implica entonces que una partícula de prueba en caída libre en un campo gravitacional uniforme también describe una geodésica de la métrica plana de Minkowski. La ocurrencia genial de Einstein fue postular que *cualquier* partícula de prueba en caída libre traza una geodésica espacio-temporal conforme a una métrica apropiada característica —más exactamente, constitutiva— del campo gravitacional que la rodea. Tal métrica por lo general no es plana, pero, si postulamos que tiene la misma signatura que la métrica de Minkowski, se sigue que esta última se le aproxima tangencialmente en cada punto del espacio-tiempo. Ello explica la validez local de la Relatividad Especial. La identidad esencial de inercia y gravitación queda ahora asegurada en todos los casos, pues el movimiento inercial se concibe simplemente como caída libre a gran distancia de toda fuente de gravitación (o en el límite local), mientras que la caída libre es reconocida como el movimiento propio de la materia dejada a sí misma—su movimiento natural, por así decir. Esta concepción geométrica de la gravitación le permitió también a Einstein superar lo que le parecía ser un grave defecto conceptual de la Relatividad Especial. En ésta, la métrica del espacio-tiempo se da por descontada como una estructura sin base física que sin embargo determina las cosmolíneas de la materia en movimiento inercial. La métrica de la Relatividad General desempeña un papel análogo con respecto a la materia en caída libre, pero, como conviene a un campo gravitacional, no carece de fuentes físicas, pues depende, a través de las ecuaciones de campo, de la distribución espacio-temporal de la materia.

El desarrollo de la Relatividad Especial y General a partir de la física del siglo XIX probablemente no tiene rival como ejemplo de innovación conceptual radical estrechamente ligada a la tradición por la crítica de conceptos. En la historia de la física cuántica los vínculos conceptuales son menos claros. La diferencia obedece en parte, seguramente, a que, mientras la génesis de la Relatividad estuvo dominada en sus dos etapas por el pensamiento excepcionalmente lúcido de un solo hombre, la física cuántica fue la obra de numerosos teóricos, no todos igualmente afanosos de coherencia y claridad intelectual, que en el mejor de los casos sólo estaban mutuamente de acuerdo "en la medida en que ello es en absoluto posible para dos pensadores independientes" (como decía Pauli a propósito de su propio acuerdo con Heisenberg).[2] Pero este hecho mismo hace a la historia de la física cuántica tanto más interesante para el estudio de la racionalidad en la evolución de la ciencia. Pues la racionalidad, que por cierto no consiste en un algoritmo para la vindicación de hipótesis, sólo puede existir como un logro colectivo de los hombres, y por lo tanto tiene que proceder de empeños encontrados. (Aunque en este caso, por cierto, en contraste con otras empresas sociales, las diferencias deben resolverse *διὰ λόγων,* mediante argumentos).

Un capítulo de esta vida polifacética de la razón nos ofrece, por ejemplo, justamente la historia de la Mecánica Cuántica (no relativista), tanto en su origen, debido a los esfuerzos aparentemente contrarios y sin embargo involuntariamente convergentes de Heisenberg y Schrödinger, como en la sucesión de sus interpretaciones. Desde la perspectiva que he adoptado aquí habría que tratar de ver este capítulo en su conexión con los que le precedieron en la historia de la física. Y me atrevo a conjeturar que un claro entendimiento de esa conexión, basado en una "reconstrucción racional" convincente del tránsito del modo de pensar clásico al cuántico, podría permitirnos lograr por fin una cierta unanimidad en la interpretación de las ideas de la Mecánica Cuántica y disipar las dudas respecto a su sentido y alcance.

Como ya he señalado, tal reconstrucción no tiene que contar la historia *wie es eigentlich gewesen.* Con todo, no es una tarea fácil y puede que tropiece con dificultades insuperables. La documentación histórica reunida, ordenada y dilucidada por Jammer (1966, 1974) y recientemente, con mayor detalle, por Mehra y Rechenberger (1982), muestra que dicho tránsito fue mucho menos transparente para los partícipes que la elaboración de la Relatividad por Einstein. Dicha falta de claridad en los orígenes puede quizás explicar

2. Wolfgang Pauli a Hendrik Kramers, carta del 27 de julio de 1925, citada por Mehra y Rechenberg 1982, vol. 3, p. 322.

en parte por qué la verdadera significación de la Mecánica Cuántica nunca ha dejado de ser una cuestión disputada.

No es mucho lo que sabría decir al respecto; pero, evocando algunos hechos históricos, puedo tal vez infundir un poco de vida a estas indicaciones demasiado abstractas. En el §1 del artículo en que propuso la hipótesis de los cuantos de luz, Einstein (1905) probó que la fórmula para la radiación térmica que se deduce de la electrodinámica y la mecánica estadística clásicas —la llamada Ley de Rayleigh y Jeans— no solamente no concuerda con los resultados experimentales, sino que es intrínsecamente absurda. Se trata de la fórmula

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT \tag{8.1}$$

donde u_ν representa la radiación emitida por un "cuerpo negro" (esto es un cuerpo que absorbe o emite radiación a todas las frecuencias) a frecuencias comprendidas dentro de un pequeño intervalo $(\nu, \nu+d\nu)$, T es la temperatura (en la escala Kelvin) y k es la constante de Boltzmann. Obviamente la energía total irradiada por el cuerpo a todas las frecuencias sería igual a la integral divergente $\int_0^\infty u_\nu d\nu$ y por ende excedería a toda cantidad asignable. Este argumento *ad absurdum* hacía patente que la física clásica necesitaba una reforma radical, pero no daba la más mínima pista sobre cómo había que seguir adelante. Einstein procuró inspirarse en la ley de la radiación térmica que Planck (1900) había derivado de oscuras consideraciones teóricas, pero que todas las mediciones efectuadas hasta entonces confirmaban. Como la radiación de un cuerpo negro, según había mostrado Kirchhoff (1860), no depende de la naturaleza del cuerpo radiante, se podía libremente elegir cualquier modelo del mismo. Planck imaginó uno formado por una colección de osciladores armónicos que vibrasen a todas las frecuencias concebibles. Para derivar su ley postuló que la energía $U(\nu)$ de los osciladores que vibran a una cierta frecuencia ν no es una magnitud continua, infinitamente divisible, sino una cantidad discreta, compuesta de un número entero de partes finitas iguales. Planck probó entonces, partiendo de principios clásicos, que dichas partes o "elementos de energía" $E(\nu)$ son proporcionales a la frecuencia. Simbólicamente: $U(\nu) = nE(\nu) = nh\nu$, donde n es un entero y el factor de proporcionalidad h con las dimensiones de la acción (energía $\times$ tiempo) es la famosa constante de Planck. Bajo este supuesto, Planck pudo deducir que la energía media de los osciladores no estaba dada por kT, como en la fórmula clásica, sino por $h\nu/e^{h\nu/kT} - 1$. Sustituyendo aquella expresión por ésta en (8.1) obtuvo la célebre Ley de Planck:

$$u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \tag{8.2}$$

Einstein sostuvo que "la determinación [por Planck] de los cuantos elementales es, hasta cierto punto, independiente de la 'teoría de la radiación del cuerpo negro' construida por él" (1905, §2), y llegó a la conclusión de que la "radiación monocromática de baja densidad se comporta [. . .] como si consistiese de cuantos elementales de energía, mutuamente independientes, de magnitud $h\nu$" (§ 6). La hipótesis de los cuantos de energía fue aplicada con éxito en los próximos años a varios fenómenos, en particular a la irritante anomalía de los calores específicos a bajas temperaturas (Einstein 1907a, Debye 1912). Con la publicación del artículo de Bohr "Sobre la constitución de los átomos y las moléculas" (1913) pasó a ser la idea central de un vigoroso programa de investigación acerca de la estructura atómica y las rayas espectrales. Pero no obstante sus asombrosos éxitos experimentales, la hipótesis cuántica siguió siendo, a lo largo de toda esta época de la llamada Antigua Teoría Cuántica (hasta 1925-26), una conjetura afortunada pero gratuita. La

Antigua Teoría Cuántica concebía el átomo como un sistema mecánico clásico que puede hallarse en una serie de estados estacionarios diferentes, sujetos a la "condición cuántica" de que, para cada coordenada generalizada q y su momento conjugado p, la integral $\oint pdq$ tomada sobre cualquier curva cerrada en el espacio de fase, sea igual al producto de h por un entero. De ello se sigue que la transición de un estado estacionario a otro sólo puede ocurrir en forma instantánea, misteriosamente discontinua, al emitir o absorber el átomo una cantidad fija de energía, característica de la transición de que se trata. Dicho comportamiento era por cierto totalmente incompatible con los conceptos y principios de la mecánica clásica utilizados en la descripción de los estados estacionarios. Como la condición cuántica daba buenas predicciones pero la teoría no ofrecía ninguna razón que permitiera entenderla, era casi materia de fe entre los adherentes al programa. Así, cuando el joven Heisenberg utilizó productos de h por múltiplos de ½ para dar cuenta del efecto de Zeeman llamado "anómalo", Pauli objetó indignado que, de admitirse ese recurso, "pronto se estarían introduciendo cuartos y octavos también, hasta que la teoría cuántica entera se derrumbara hecha polvo" (citado por Mehra y Rechenberger 1982, vol. 3, p. 30). Al fin, hasta el mismo Bohr reconoció que mezclar la mecánica clásica con las nuevas ideas cuánticas era una estafa ("*ein Schwindel*"), la cual, sin embargo, "aunque fuese un crimen desde el punto de vista lógico", bien podía aún "en muchas situaciones dar frutos en la pesquisa de los secretos de la naturaleza" (Bohr a Pauli, carta del 11 de diciembre de 1924).

Como las dificultades iban en aumento y se puso en evidencia que los métodos de Bohr no procuraban un modelo satisfactorio ni siquiera del átomo de helio, se sintió cada vez con más fuerza la necesidad de desarrollar a partir de primeros principios un esquema completamente nuevo para la descripción y explicación de los procesos atómicos. Pauli esperaba que “no sólo el concepto dinámico de fuerza, sino también el concepto cinemático de movimiento de la teoría clásica tendría que someterse a profundas modificaciones” (Pauli a Bohr, carta del 12 de diciembre de 1924). El revolucionario trabajo de Heisenberg, “Sobre una reinterpretación cuántica de las relaciones cinemáticas y mecánicas” (1925) respondió justamente a tales expectativas. Born lo saludó como “un intento de hacer justicia a los nuevos hechos, no por la adaptación más o menos artificiosa y forzada de viejos y consabidos conceptos, sino por la creación de un sistema conceptual nuevo, realmente adecuado” (Born y Jordan 1925, p. 858). Heisenberg empieza recordando que las reglas formales empleadas en la Antigua Teoría Cuántica para calcular las cantidades observables “suscitan una grave objeción en cuanto contienen como un ingrediente esencial relaciones entre cantidades que al parecer no pueden, en principio, ser observadas (vgr. la posición y el período de revolución del electrón), de suerte que dichas reglas patentemente carecen de todo fundamento físico tangible (*anschaulich*).” Para superar esta objeción al equipo conceptual de la teoría, Heisenberg proponía construir una nueva “mecánica cuántica, análoga a la mecánica clásica, [. . .] en la que sólo figuren relaciones entre magnitudes observables” (1925, p. 879). La clave del proyecto de Heisenberg —tal como fue dilucidado y elaborado por Born y Jordan (1925)— consiste en reemplazar cada una de las funciones reales del tiempo (coordenadas y momentos generalizados) que se emplean en la descripción clásica de un sistema mecánico, por una matriz de funciones complejas del tiempo. Con dichas matrices se construye, por analogía con la clásica función hamiltoniana y conforme a las reglas del álgebra de matrices y del nuevo cálculo diferencial de matrices introducido por Born y Jordan, una “matriz hamiltoniana” característica del sistema bajo consideración. Un sistema mecánico-cuántico se describe completamente mediante la respectiva matriz hamiltoniana H y un número apropiado de pares de matrices conjugadas Q_j, P_j, que satisfacen las siguientes relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned} Q_jP_k - P_kQ_j &= (ih/2\pi)\delta_{jk} \\ Q_jQ_k - Q_kQ_j &= P_jP_k - P_kP_j = 0 \end{aligned} \tag{8.3}$$

(donde δ_{jk} es la matriz unidad si $j = k$, y la matriz cero si $j \neq k$). La evolución del sistema está gobernada por las ecuaciones matriciales

$$\frac{\partial Q_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial P_i} \qquad \frac{\partial P_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial Q_i} \tag{8.4}$$

las cuales son formalmente idénticas a las ecuaciones canónicas de la mecánica clásica.[3] Las relaciones de conmutación postuladas introducen la constante de Planck en un punto donde es inevitable que surja un factor de proporcionalidad; pero—a diferencia de la "condición cuántica" de la Antigua Teoría—los nuevos principios no contienen "números mágicos". Aunque la motivación de Heisenberg no puede aclararse sin otras consideraciones (como las que se presentan, muy persuasivamente, en el §1 del apéndice matemático de Heisenberg 1930), el bosquejo precedente basta para mostrar cómo la nueva mecánica, a la vez que cambiaba radicalmente los conceptos de la clásica, lograba preservar sus leyes dinámicas. Por eso, como Dirac (1926, p. 642) señaló acertadamente, se podía "emplear en la nueva teoría *toda* la información suministrada por la teoría clásica". Un vínculo aún más fuerte con la mecánica clásica se advierte en la respuesta alternativa a las dificultades de la Antigua Teoría Cuántica, elaborada independientemente por Schrödinger en

3. En la mecánica clásica, claro está, la hamiltoniana H y las coordenadas generalizadas de posición y momento P_i y Q_i no son matrices, sino funciones (o, si se quiere, matrices 1×1).

1926 *y* conocida luego bajo el nombre de Mecánica Ondulatoria. Schrödinger sentía una profunda aversión hacia la discontinuidad cuántica, "este maldito brincar cuántico", como la llamó alguna vez en el seminario de Bohr (citado por Jammer 1966, p. 324; véase asimismo Schrödinger 1952*)*. Se enorgullecía de ofrecer un nuevo enfoque de la mecánica del átomo, que reemplazaba la condición cuántica por un requisito distinto que no hacía mención de "números enteros" —si bien tales números eventualmente surgen en la teoría, lo hacen "del mismo modo natural como se presentan en el caso del *número de nodos* de una cuerda vibrante". (Schrödinger 1926a, p. 361*)*. Como es sabido, la Mecánica Cuántica tomó su forma definitiva después que Schrödinger demostrara que su propio esquema y el de Heisenberg, no obstante su visible discrepancia, comparten la misma estructura básica y son, en efecto, matemáticamente equivalentes. La prueba de Schrödinger fue tanto más sorprendente cuanto que, como él mismo dice, "el alejamiento de la mecánica clásica parecía efectuarse en direcciones diametralmente opuestas en las dos teorías". Así, mientras la de Heisenberg, con sus listas de cantidades discretas indicadas por pares de enteros, había sido descrita por Born y Jordan (1925, p. 879) como una "verdadera teoría del discontinuo", "la Mecánica Ondulatoria significa, por el contrario, un paso desde la mecánica clásica justamente *hacia la teoría del continuo.* En vez de un acontecer descrito mediante un número finito de variables dependientes y un número finito de ecuaciones parciales ordinarias, tenemos el devenir de un campo en el espacio de configuración, gobernado por una única ecuación diferencial *parcial* derivable de un principio de acción". (Schrödinger 1926b, p. 734). No puedo adentrarme más en esta fascinante coyuntura histórica. Espero, sin embargo, que las palabras de Schrödinger dejarán en claro hasta qué punto se sentía llamado a *realizar,* no a *abolir* el espíritu de la física clásica.

En resumen, sostengo que para percibir la racionalidad de los cambios radicales en los conceptos de la física básica hay que entenderlos como episodios de una *historia intelectual*, la historia del pensamiento físico. El carácter intelectual de esta historia excluye los vuelcos infundados. Los nuevos modos de pensar surgen de los antiguos por autocrítica provocada por sus tendencias y dificultades intrínsecas. Con ello no quiero negar que los conceptos fundamentales de la física son, como decía Einstein, "invenciones libres del espíritu humano" (Einstein 1934, p. 180), de suerte que no hay manera de calcular lo que llegarán a ser en el futuro. Aunque impredecibles, tienen que ser fundados, o no serían "del espíritu" (ni tampoco, en rigor, "libres"). Pero esto es justo lo que nos dicen las fuentes, al menos dentro de la tradición de la física matemática moderna: los autores de innovaciones conceptuales siempre o casi siempre han tratado de motivarlas cuidadosamente y de mostrar su proveniencia de nociones ya establecidas, trazando analogías apropiadas, señalando correspondencias e incluso dando a las ideas nuevas los mismos sugestivos nombres de antes. La concepción de la física como una forma de vida intelectual, cuyos grandes "cambios de marcha" han sido catalizados por la reflexión crítica, no es favorecida por la tendencia, endémica entre los filósofos de la ciencia, a tratar las teorías físicas —en el sentido laxo ordinario del término— como expresiones informales de esos objetos lógicos que los filósofos llaman "teorías científicas" en una acepción estricta convencional. Ya sea que en la acepción filosófica una "teoría" se entienda —con el positivismo de los años 30— como un conjunto de proposiciones cerrado bajo la relación de deducibilidad, o —siguiendo a Sneed y Stegmüller— como una estructura matemática rodeada de una hueste informalmente caracterizada de aplicaciones, una tal "teoría" o "núcleo teórico" no es una aventura del pensamiento, sino un ente ideal fijo, consumado, sin señas de su origen ni gérmenes de un cambio, al cual la historia—la invención, la crítica, la reforma— sólo puede sobrevenirle como un accidente extrínseco, Las "teorías", en ambas acepciones filosóficas, pueden yuxtaponerse como pirámides egipcias, cuyos diversos elementos pueden ponerse en algún tipo de correspondencia externa, pero no pueden tener con otras teorías una relación genética. El modelo estructuralista de las teorías es mejor que el otro, sintáctico-semántico, en cuanto da cabida a una evolución dentro de las llamadas "redes teóricas" *(theory nets)* mediante el ejercicio de un genuino pensamiento científico en el desarrollo de aplicaciones. Pero no ayuda a entender las conexiones genéticas entre modos de pensar sucesivos incorporados en distintas teorías (en la acepción ordinaria).[4] Sólo repensando los grandes sistemas intelectuales del pasado, no reduciéndolos a huesos sin sustancia, se puede llegar a ver la razón en su historia.

4. Dejo esta aseveración como la enuncié en Salzburgo, en 1983, basándome en publicaciones de la escuela estructuralista anteriores a esa fecha, en particular, Sneed 1971. Pero en los últimos años, gracias (presumo) a la influencia liberalizadora de C. Ulises Moulines, la filosofía estructuralista de la ciencia ha llegado a ser un instrumento intelectual muchísimo más flexible y adaptable de lo que me parecía entonces. Cf. Balzer, Moulines y Sneed 1987, Moulines 1991, y mis propias reflexiones sobre el libro de Balzer et al. en Torretti 1990, Capítulo 3.

9

El »observador« en la física del siglo XX

En su libro *El concepto de naturaleza* (1920), el matemático y filósofo inglés A. N. Whitehead distingue dos maneras de pensar en la naturaleza. Pensamos en la naturaleza de una manera *homogénea* cuando la concebimos como un sistema cerrado de objetos cuyas relaciones mutuas se pueden describir sin referirse al hecho de que alguien piensa en ellos o los percibe. Pensamos en la naturaleza de una manera *heterogénea* cuando nuestro pensamiento alude expresamente a que la naturaleza es algo en que se piensa y que se percibe (Whitehead 1920, p. 5). Según Whitehead, la ciencia natural sólo piensa homogéneamente sobre la naturaleza.[1] Por eso caen fuera de la ciencia natural ciertas propiedades manifiestas de las cosas que a nuestro entender reflejan una reacción orgánica o psíquica del ser humano; por ejemplo, la fealdad y la belleza, pero también las cualidades llamadas secundarias —olor, sabor, color— que Galileo comparaba con el cosquilleo que uno siente si le introducen una pluma de ave en la nariz (*Il Saggiatore*, § 48; EN, VI, 350).

No cabe duda de que en sus tres primeros siglos —desde 1600 hasta 1900— la física moderna ha discurrido sobre la naturaleza haciendo caso omiso de la existencia del hombre. Pero desde comienzos del siglo XX hallamos en la literatura de la física referencias explícitas al "observador" que parecerían desmentir la aseveración de Whitehead. Dichas referencias indican, a primera vista, que no se puede hablar del objeto de la física sin mencionar al sujeto que lo investiga. Por cierto, no todo lo que se ve impreso tiene que tomarse

---

1. "Natural science is exclusively concerned with homogeneous thoughts about nature". (Whitehead 1920, p. 3).

al pie de la letra. Si las alusiones al "observador" en la literatura de la física se pudieran eliminar sin pérdida de información concluiríamos que representan sólo una manera de hablar que en nada afecta la tradicional homogeneidad —en el sentido definido por Whitehead— del pensamiento científico sobre la naturaleza. En cambio, si resultare que dichas alusiones no se pueden eliminar impunemente, por cuanto el "observador" es un ingrediente irreductible de las situaciones físicas descritas en la literatura científica, entonces habría que concluir que el proyecto de concebir y entender a la naturaleza sin tener en cuenta la presencia consciente de los hombres, que guio a la física moderna durante su primera etapa, ha sido abandonado porque no se podía cumplir.

A continuación consideraré tres contextos diferentes en que suele mencionarse al "observador" en la literatura física de nuestro siglo, a saber, 1º la *Teoría Especial de la Relatividad*; 2º la *Mecánica cuántica*; y 3º el llamado *Principio antrópico* de la cosmología actual.

1

La Teoría Especial de la Relatividad fue propuesta por Einstein (1905a). El epíteto "especial" es un agregado posterior, que conecta y contrasta esa teoría con la teoría de la gravitación propuesta por Einstein diez años más tarde (1915c) y bautizada por él, con cierta impropiedad, "teoría general de la relatividad" (presumiblemente porque, aunque contradice a la teoría de 1905, supone y respalda su validez local). La palabra misma 'relatividad' trae a la memoria el relativismo, la concepción filosófica según la cual "el hombre es la medida de todas las cosas", de modo que el bien y el mal, la belleza y la fealdad, la verdad y el error dependen del punto de vista, el temperamento, o la libre iniciativa de la persona que los juzga. La Teoría Especial de la Relatividad es uno de los dos pilares de la física contemporánea, y nadie cuestiona su validez, dentro de su campo de aplicación. Pero en sus comienzos la teoría fue muy combatida. Entonces sus partidarios —ya sea porque se dejaron sugestionar por la palabra 'relatividad', ya sea porque deseaban llamar la atención y ganar adherentes en una época marcadamente relativista— hablaron con insistencia del "observador" con respecto al cual serían relativas las cosas cuya relatividad la teoría proclama. El tratadista J. L. Synge define explícitamente al "observador" relativista como una idealización del ser humano.[2] Sin embargo, la teoría física de la relatividad nada tiene que ver con el relativismo, ni envuelve, en su descripción de la naturaleza, una referencia a la actividad humana de observarla. La relatividad de que aquí se trata es puramente una relación entre objetos materiales en movimiento, y no presupone que algunos de esos objetos sean personas conscientes que perciben y miden a los otros.

La idea central de la relatividad física puede formularse así: si tenemos dos laboratorios, uno de los cuales se mueve uniformemente con respecto al otro, no es posible determinar mediante experimentos físicos de ninguna clase cuál de los dos laboratorios se mueve y cuál está en reposo. Esta idea puede ilustrarse con ciertos hechos familiares. Debido al movimiento de rotación de la tierra, un punto situado sobre el ecuador se mueve en cualquier momento aproximadamente a poco menos de 1.700 kilómetros por hora con respecto a otro punto situado en las antípodas del primero. Debido al movimiento de traslación de la tierra, todos nos movemos en marzo a unos 215.000 kilómetros por hora con respecto a un objeto que siguiera moviéndose como nos movíamos en septiembre. Sin embargo, el jugador de tenis

2. "Nos tomaremos la libertad de reducir a un ser humano a no ser más que un punto en movimiento; idealizado así, lo llamaremos un *observador*" (Synge 1955, p. 11).

que devuelve la pelota que le disparan, el acróbata que salta de un trapecio a otro, el automovilista que baja una cuesta llena de curvas actúan de la misma manera —hacen los mismos movimientos, contraen y estiran los mismos músculos— aquí o en las antípodas, en marzo o en septiembre. Ya Galileo llamó la atención sobre este género de hechos, que adujo en defensa de la tesis copernicana sobre el movimiento de la tierra, alegando que no se podía refutarla mediante experimentos mecánicos, tales como brincar en el aire y anotar dónde uno cae, o comparar el alcance de las balas de cañón disparadas hacia el oriente y hacia el poniente. Ello no obstante, hasta fines del siglo XIX se pensaba que los astros nadan en un océano de éter cuyas olas son la luz, de modo que la velocidad de ésta respecto a un laboratorio terrestre no podía ser la misma en la dirección en que la tierra avanza en el éter y en la dirección perpendicular a aquélla. El fracaso de los experimentos, de creciente precisión, diseñados para medir tales diferencias direccionales en la velocidad de la luz indujo a Einstein a proclamar que la relatividad consagrada por Galileo en la mecánica, se extendía también a la óptica y en general a todos los campos de la física. Para evitar una contradicción entre óptica y mecánica propuso reformar a ésta última. La diferencia entre la nueva y la vieja mecánica, insignificante a las velocidades a que estamos acostumbrados, se hace inmensa a velocidades próximas a la de la luz, por ejemplo, a las velocidades que alcanzan los protones en un acelerador de partículas, donde éstos —no está demás recordarlo— se comportan de acuerdo con lo predicho por Einstein.

Pero lo que nos importa considerar aquí es el enorme cambio conceptual que supone la Teoría de la Relatividad. Estamos acostumbrados a pensar que hay ciertas cantidades físicas fundamentales, en términos de las cuales se puede expresar la medida de todas las otras. Ellas son el espacio o distancia entre dos puntos, expresable en metros, el tiempo o lapso entre dos sucesos, expresable en segundos, y la masa o resistencia de un cuerpo a la acción aceleradora de fuerzas externas, expresable en kilógramos. Ahora bien, es una consecuencia de la teoría de la relatividad que estas tres cantidades no son una propiedad absoluta de los objetos a los cuales se las atribuye, sino que su magnitud depende de la velocidad a que esos objetos se mueven relativamente al laboratorio en que se las mide. Esta consecuencia, a primera vista sorprendente, ha sido por cierto confirmada. Por ejemplo, cuesta mucho menos incrementar la velocidad de un protón desde 1.000 a 10.000 kilómetros por segundo, que desde 101.000 a 110.000 kilómetros por segundo. Asímismo, la media vida de una partícula efímera que llega a gran velocidad desde la estratósfera es mucho mayor —medida con nuestros relojes— que la media vida de otra partícula de la misma clase que reposa en un laboratorio terrestre.[3] Se sobreentiende, claro está, que la media vida de ambas partículas sería idéntica si la primera se midiese con un reloj que se mueva con ella. Otra consecuencia de la Teoría Especial de la Relatividad, estrechamente ligada a las anteriores, es que el orden de los sucesos en el tiempo también depende del estado de movimiento del reloj utilizado para fecharlos. La discrepancia crece con la velocidad relativa de los relojes, pero también con la distancia a que ocurren los sucesos que se trata de fechar, y por lo tanto puede ser significativa cuando se trata de objetos muy distantes entre sí aun cuando las velocidades que hay que considerar sean pequeñas. Supongamos que ahora mismo fallece un astronauta en la galaxia de Andrómeda y más o menos al mismo tiempo muere su mujer aquí en la tierra. En tal caso, puede ocurrir que el orden de estos sucesos sea distinto para alguien que camina sobre la tierra a 4 kilómetros por hora que para alguien que está sentado. Si el astronauta murió

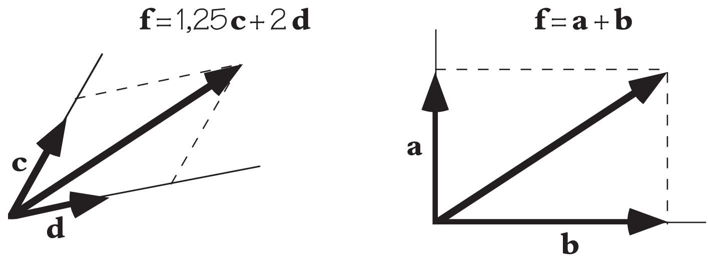
3. La 'media vida' de una partícula dada es el lapso de tiempo al cabo del cual hay una probabilidad igual a 0,5 de que ella haya dejado de existir por trasmutación espontánea.

primero los hijos del primer matrimonio de su mujer reciben una parte de su herencia; si murió después los hijos del primer matrimonio de él heredan una parte de los bienes de ella. Un juez llamado a decidir quién hereda a quién tendría que elegir una cronología, entre las muchas disponibles. Afortunadamente, la noticia de la muerte del astronauta no llegará a la tierra en 2.000.000 de años, el tiempo que una señal de radio se tarda en venir desde la galaxia nombrada. Para ese entonces, habrán desaparecido las herencias y sus posibles herederos.

Es a propósito de esta relatividad de cantidades y relaciones físicas fundamentales que la literatura relativista habla del "observador". Se dice que el orden de los sucesos es distinto para distintos observadores. O que la masa o duración de una partícula no es la misma para uno que la ve pasar que para otro que va montado sobre ella. A mi me parece que este modo de expresarse no se justifica y sólo sirve para crear confusión. Adviértase, en primer lugar, que cuando hablamos de la medición de cantidades físicas no nos referimos a las percepciones de personas, sino a los resultados registrados en la interacción de un objeto con un instrumento de medir. Estos resultados son, en principio, accesibles a todas las personas, no importa cómo se muevan. La relatividad tiene que ver con el movimiento del objeto con respecto al instrumento (o del instrumento con respecto al objeto). Pero las personas no están obligadas por su respectivo estado de movimiento a valerse de un determinado instrumento. Un hombre de ciencia radicado en la tierra puede hacer mediciones con equipo instalado en el planeta Marte. Más aún, la teoría contiene reglas precisas —las transformaciones de Lorentz— para convertir los resultados obtenidos con un instrumento a los resultados correspondientes a otro instrumento de la misma clase, que se mueve a cierta velocidad con respecto al primero.

Ya en 1907 el matemático Hermann Minkowski había explicado correctamente lo que significa, en la teoría de Einstein, la relatividad de las cantidades físicas tradicionalmente consideradas fundamentales. Cada una de estas cantidades es sólo un componente, esto es, la proyección en una cierta dirección, de un vector discernible en un espacio vectorial de 4 dimensiones. Pero entonces hay que ver a éste último como la representación matemática de la cantidad física real. Su magnitud y dirección son, por cierto, absolutas y no relativas. Para entender mejor lo que esto significa consideremos un vector en el plano de esta página; por ejemplo, la flecha **f** en la fig. 8. Ella proyecta distintos componentes

Fig. 8



La misma flecha **f** puede concebirse como una combinación lineal o "superposición" de los vectores **a** y **b** (**f**= **a**+**b**), o de los vectores **c** y **d** (**f**=1,25**c**+2**d**). **a** y **b** son los componentes de **f** con respecto al par ⟨**a**,**b**⟩; sus componentes con respecto a ⟨**c**,**d**⟩ son 1,25**c** y 2**d**.

en distintas direcciones; por ejemplo, **a** en la dirección vertical y **b** en la horizontal. Recordando el "paralelógramo de las fuerzas", decimos que nuestra flecha es la "resultante" o "suma" de esos componentes: **f** = **a** + **b**. Pero también puede analizársela como la suma de los componentes que proyecta en *cualquier* otro par de direcciones (no paralelas). Por ejemplo, en el dibujo al lado derecho de la fig. 8, **f** se presenta como la suma de sus proyecciones en la dirección de las flechas **c** y **d**, las que son iguales a ciertos múltiplos de las mismas, a saber, 1,25 veces **c** y 2 veces **d**. Según esto, cualquiera de las flechas que salen de un mismo punto en el plano puede verse como una "combinación lineal" o "superposición" de un par de flechas que salgan de ese punto, esto es, como la "suma" de ciertos múltiplos de esas dos flechas. Decimos por eso que el sistema de las flechas que salen de un punto en el plano forma un espacio vectorial de *dos* dimensiones. En un espacio vectorial de *n* dimensiones cada vector puede representarse como la superposición de *n* vectores con direcciones diferentes. Si el espacio vectorial tiene tres dimensiones un vector también puede analizarse en dos componentes, tomando su proyección sobre un plano cualquiera y sobre una dirección perpendicular a ese plano. Análogamente, en el espacio vectorial de cuatro dimensiones considerado por Minkowski cualquier vector se descompone en sus proyecciones sobre un hiperplano (de tres dimensiones) y sobre una dirección perpendicular a ese hiperplano. Minkowski muestra como las cantidades fisicas tradicionales pueden agruparse por pares, tales como distancia y lapso de tiempo, momento cinético y energía, que hay que entender justamente como proyecciones de este tipo de alguna cantidad fisica real, representable por un cuadrivector (un vector en el referido espacio de cuatro dimensiones). La selección tradicional de las cantidades fisicas fundamentales se debe a que naturalmente distinguimos en el continuo cósmico la dirección temporal (unidimensional) y el hiperplano espacial (de tres dimensiones) y medimos los objetos fisicos según sus proyecciones a lo largo de aquella dirección y este hiperplano. Los experimentos de alta precisión a grandes velocidades han puesto en evidencia que esa descomposición natural ocurre de muchas maneras, dependientes del estado de movimiento de los instrumentos de medida. Así, hemos podido entender que las cantidades fisicas tradicionales no son sino sombras y alcanzar, a través de ellas, la realidad cuadridimensional proyectada en ellas. Por eso, dice Minkowski, la teoría de Einstein no debe llamarse "la teoría de la relatividad" sino "la teoría del mundo absoluto".

2

El segundo pilar de la fisica actual es la Mecánica Cuántica. No puedo dar aquí la larga lista de los fenómenos que la corroboran. Baste decir que sin ella no serían concebibles los transistores que animan la computadora con que escribo este capítulo, ni el láser con que imprimiré una copia cuando lo termine. La Mecánica Cuántica fue inventada por Heisenberg (1925) y Schrödinger (1926), en dos versiones distintas cuya equivalencia fue luego establecida por Schrödinger (1926a). Su origen se remonta a la hipótesis adelantada por Planck (1900) y generalizada por Einstein (1905), según la cual los cuerpos sólo pueden emitir o absorber radiación de una cierta frecuencia ν en múltiplos enteros de $h\nu$, donde h es una cantidad muy pequeña pero constante, la constante de Planck, llamada a veces "el cuanto de acción".[4] En los años subsiguientes la constante de Planck va a figurar en todas las nuevas fórmulas propuestas en la física atómica. Esas fórmulas implicaban, en general, que los intercambios de energía y momento que tienen lugar cuando dos objetos físicos interactúan —por ejemplo, cuando una bola de billar choca con otra, o cuando la radiación solar calienta a una iguana— no son procesos continuos, como suponía la física clásica, sino que ocurren a saltos, por así decir: energía y momento se transfieren en cantidades discretas, múltiplos de un cierto mínimo del que h es un factor. Evidentemente, toda observación envuelve una interacción entre el instrumental de laboratorio y el sistema

4. $h \approx 6{,}63 \times 10^{-34}$ Joule-segundos. Las dimensiones de la constante de Planck se deducen inmediatamente de la relación: energía = $h \times$ frecuencia. Son las dimensiones (energía $\times$ tiempo) de la cantidad física llamada 'acción', esto es, la cantidad extremalizada según el Principio de Maupertuis. Véanse, en el Capítulo 8, las explicaciones que preceden a la ecuación (8.2).

físico observado. Siempre se ha sabido que dicha interacción perturba en alguna medida el sistema bajo estudio; pero la física clásica ponía tales perturbaciones a la cuenta de los ineludibles errores de observación, ignorándolas por completo en la descripción teórica de los fenómenos. Las aplicaciones de la física clásica se conciben como sistemas aislados, cuyo estado evoluciona independientemente de todo lo demás que hay en el mundo, al menos en el respecto estudiado. Se sobreentiende que ésta es una concepción idealizada; que un péndulo real, por ejemplo, pierde constantemente energía por fricción con el aire y con el cuerpo del que está suspendido, y también al estirarse y acortarse la cuerda, necesariamente elástica, de la que pende. Pero la física clásica concibe un péndulo en el vacío, colgado con una cuerda inextensible de un punto con el cual no hay fricción. En el contexto de la Mecánica Cuántica, este enfoque clásico no puede sostenerse de manera exclusiva, ni siquiera a título de idealización. La discontinuidad de las transferencias de energía y momento impide postular un límite ideal en que la perturbación del objeto observado se reduce a cero. Por eso la Mecánica Cuántica concibe de distinto modo la evolución de un sistema físico aislado y el cambio que sufre cuando se lo somete a una medición. La evolución del sistema aislado —que, siguiendo a Roger Penrose, llamaré un proceso tipo **U**— es un proceso continuo, determinista, regido por la ecuación de Schrödinger, una ecuación diferencial como las utilizadas en la física clásica, la cual garantiza, por sus propiedades matemáticas, que el sistema puede cambiar de una sola manera a partir de ciertas condiciones dadas. El paso de un estado a otro cuando el sistema interactúa con los instrumentos de medir —que llamaré transición tipo **R**— es un suceso discontinuo, aleatorio, que puede tener distintos resultados, a cada uno de los cuales la teoría asigna una probabilidad dependiente del estado alcanzado por el sistema durante su anterior evolución determinista y de la índole del instrumento en cuestión (específicamente, de cuál es la cantidad física que mide). Además, la Mecánica Cuántica agrupa las cantidades físicas observables en familias de cantidades afines —que por una razón técnica se llaman "conmutables"— con la siguiente propiedad: si dos cantidades no pertenecen a la misma familia —esto es, si no son conmutables— no pueden estar ambas inequívocamente determinadas a la vez. Ahora bien, justamente las cantidades canónicamente conjugadas en que la mecánica clásica basaba la determinación completa de la evolución de los sistemas físicos, son inconmutables por pares. Consideremos, para más precisión, uno de estos pares de cantidades canónicamente conjugadas, por ejemplo, el primer componente Q_1 del momento cinético y la primera coordenada de posición P_1 de un protón en un instante dado (cf. las ecuaciones (8.3) y (8.4)). Entonces, el producto de la dispersión de los valores registrados en la medición de aquél por la dispersión de los valores registrados en la de éste será siempre mayor o igual que $h/4\pi$. Esto significa, en nuestro ejemplo, que una determinación inequívoca de la posición del protón sólo puede obtenerse al precio de una infinita ambigüedad en la determinación del momento. Heisenberg (1927), junto con anunciar esta consecuencia de su teoría, ofreció la siguiente interpretación intuitiva: la interacción física requerida para fijar la posición del objeto perturba irrecuperablemente su movimiento, mientras que la interacción física envuelta en una medición del momento cinético del objeto "emborrona" su posición hasta hacerla irreconocible. Esta interpretación sugiere que el objeto aislado tiene de hecho una posición y un momento cinético únicos y bien definidos, que no es posible averiguar a la misma vez debido al efecto perturbador de nuestros aparatos de medir. Pero esta sugerencia no calza bien con las implicaciones de la teoría. La suposición de que en un sistema físico aislado dos cantidades inconmutables están ambas inequívocamente determinadas a la vez genera predicciones que contradicen a la Mecánica Cuántica.

Para darle más precisión a estas ideas tengo que recurrir nuevamente al concepto de espacio vectorial. La Mecánica Cuántica representa el estado de un sistema físico mediante un vector en un espacio matemático ideal, el espacio de fase del sistema. Este espacio —llamado 'espacio de Hilbert', en honor al matemático que lo concibió— tiene, en el caso más general, infinitas dimensiones, de modo que no es posible visualizarlo. Pero comparte algunas de las características más significativas de los espacios vectoriales intuitivos. Por ejemplo, cualquier vector puede expresarse como una suma de vectores pertenecientes a una base, multiplicados por escalares, esto es, por factores numéricos apropiados; sólo que dicha suma normalmente tendrá infinitos sumandos (propiamente, es una serie convergente).[5] La teoría asocia a cada cantidad física observable en el sistema una cierta transformación lineal de su espacio de fase.[6] Ahora bien, si aplicamos una transformación lineal a un vector cualquiera, generalmente obtenemos otro que no tiene nada que ver con el primero. Pero suele haber ciertos vectores, característicos de la transformación lineal, cuya imagen es igual al vector original multiplicado por un escalar. Estos vectores son los "vectores propios" (*Eigenvektoren*) de la transformación y los escalares que los multiplican son los "valores propios"

---

5. Además, los escalares son números complejos.

6. Me explico: Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial sobre el cuerpo de escalares $\mathbb{K}$. (Este concepto se define en el Vocabulario matemático, *s.v.* VECTORES Y TENSORES). Una *transformación* $f: \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ asigna de modo exclusivo a cada vector $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ un vector $f(\mathbf{v}) \in \mathcal{V}$ (que puede ser el mismo $\mathbf{v}$), de modo que para cada $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ hay un $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$ tal que $\mathbf{u} = f(\mathbf{w})$. Diré que f *envía* $\mathbf{v}$ a $f(\mathbf{v})$, y que $f(\mathbf{v})$ es la *imagen* de $\mathbf{v}$ por f. La transformación f es *lineal* si (i) la imagen de una suma de vectores es igual a la suma de las imágenes de los sumandos —esto es, si, cualesquiera que sean los vectores $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$, $f(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w})$— y (ii) la imagen de un vector multiplicada por un escalar es igual a la imagen del producto del vector por ese escalar —en otras palabras, si, para cualquier vector $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ y cualquier escalar $\alpha \in \mathbb{K}$, $f(\alpha\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v})$.

(*Eigenwerte*) correspondientes.[7] La asociación establecida por la Mecánica Cuántica entre una cantidad física observable y una transformación lineal del espacio de fase del sistema observado significa lo siguiente: el valor observado de la cantidad en cuestión será siempre igual a uno de los valores propios de la transformación lineal correspondiente.

Valiéndome estos conceptos, puedo decir en qué consiste la transición tipo **R** de un sistema físico que interactúa con un aparato de medir. Dije que el estado del sistema se representa mediante un vector del respectivo espacio de fase. Mientras el sistema está aislado, dicho vector va cambiando continuamente de instante en instante de acuerdo con la ecuación de Schrödinger. Esto es lo que llamé proceso **U**. Supongamos ahora que el sistema interactúa con un aparato diseñado para medir una cierta cantidad q. Dicha cantidad está asociada con una determinada transformación lineal T_q. Según lo que dije, la medición dará necesariamente como resultado uno de los valores propios de T_q. Para simplificar, supondré que T_q tiene un número finito de valores propios diferentes, cada uno de los cuales corresponde a un solo vector propio. Digamos que se registra el valor $q = q_1$. En ese caso, la transición **R** consistirá en que el sistema salta, discontinuamente, del último estado alcanzado en virtud del proceso **U** al estado representado por un vector propio de la transformación T_q correspondiente al valor propio q_1. La Mecánica Cuántica permite predecir

7. Utilizando el simbolismo de la nota 6, $\mathbf{v}$ es un vector propio de la transformación lineal f si $f(\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{v}$, donde $\alpha \neq 0$ es un escalar. En tal caso, α es el valor propio correspondiente al vector propio $\mathbf{v}$. Es obvio que una transformación lineal puede tener muchos vectores y valores propios. Además, un mismo valor propio puede corresponder a más de un vector propio. He aquí un ejemplo: Sea f la transformación lineal del plano que asigna a cada flecha que sale de un cierto punto O la flecha de doble longitud en la misma dirección. Entonces *cada* flecha del plano es un vector propio de f y 2 es el *único* valor propio que les corresponde a todas.

exactamente, mediante la ecuación de Schrödinger, el estado final de un proceso **U** cuyo estado inicial se conoce. Además permite calcular la *probabilidad* de que dicho estado final pase, en virtud de la transición **R**, a tal o cual vector propio de la transformación lineal asociada a la cantidad que se está midiendo, y, por ende, la *probabilidad* de que el valor observado de dicha cantidad coincida con el valor propio correspondiente. La probabilidad de que un sistema cuyo estado final se representa mediante el vector ψ pase al estado representado por el vector φ es igual al cuadrado de la proyección de ψ sobre φ.[8]

Los grandes éxitos experimentales de la Mecánica Cuántica corroboran el método de descripción que acabo de bosquejar. El experimentador "prepara" un gran número de objetos independientes de cierta clase para que evolucionen según el proceso **U** hasta que lleguen a interactuar con un aparato de medida; las estadísticas de las mediciones registradas concuerdan entonces con la distribución de probabilidades prevista por la teoría. Se habrá advertido como la descripción cuántica de los procesos naturales está enteramente orientada hacia la observación. En rigor, lo que llamamos estado de un sistema aislado no es más que una disposición para generar distintas distribuciones de probabilidades entre los valores propios de las diversas cantidades observables, en virtud de las relaciones matemáticas entre los vectores propios de éstas y el vector representativo de aquél. La distribución que de hecho se manifieste será la que corresponda a la cantidad que se haya decidido medir.

8. Si un valor propio de la cantidad observada corresponde a más de un vector propio, la probabilidad de que se observe ese valor es igual al cuadrado de la proyección del vector ψ (representativo del estado del sistema al término de la evolución **U**) sobre el hiperplano generado por los vectores propios correspondientes a ese valor. Si la cantidad observada tiene infinitos valores propios, la teoría da la probabilidad de que el valor observado caiga dentro de cierto intervalo, pero éste no es un lugar apropiado para explicar como lo hace.

Este enfoque resulta perfectamente adecuado si la Mecánica Cuántica no es más que un método de cálculo para anticipar efectos de laboratorio; si todo lo que nos enseña es que, cuando se utilicen ciertos procedimientos de preparación y medición, se registrarán tales o cuales resultados en tal o cual proporción (aproximadamente). Muchos físicos están satisfechos con entenderla de este modo y con la rica cosecha de aplicaciones técnicas que, así entendida, nos depara.[9] Pero algunos físicos y la mayoría de los filósofos no se contentan con eso y quieren que la Mecánica Cuántica, o las teorías posteriores que la refinan, respetando sus principios, ofrezcan —como la física clásica— una explicación general del acontecer físico, también en ausencia del hombre y de sus laboratorios. Esta exigencia es muy razonable. Al fin y al cabo, los procedimientos técnicos y de laboratorio son lisa y llanamente procesos físicos que el hombre explota inteligentemente para sus fines, pero que no difieren esencialmente de otros procesos físicos. No puede haber, entonces, una física del laboratorio y otra física —quizás inaccesible para nosotros— del mundo fuera del laboratorio. Sin embargo, cuando se aplican a la física cuántica reflexiones como ésta surgen dificultades conceptuales que hasta el momento nadie ha logrado resolver.

El siguiente experimento imaginado por Schrödinger (1935) da una idea de estas dificultades. Considérese un dispositivo que emite lentamente partículas de cierta clase y un contador diseñado para medir en ellas una cantidad física con sólo dos valores propios, igualmente probables, +1 y –1. Este equipo está colocado en una caja en la que además está

9. Cito a Eugen Wigner, premio Nobel de física en 1963: "El vector de estado es sólo una expresión abreviada de aquella parte de nuestra información concerniente al pasado del sistema que importa para predecir (en la medida de lo posible) el comportamiento futuro de éste. [. . .] *Las leyes de la Mecánica Cuántica sólo proveen conexiones probabilísticas entre los resultados de observaciones efectuadas posteriormente en un sistema*" (1979, p. 166; cursiva de Wigner).

encerrado un gato. Las cosas están arregladas de tal modo que en cuanto una partícula llegue al contador ocurra lo siguiente: (i) si el valor registrado es +1, se abre una botella de leche y cae un chorrito sobre un plato cerca del gato; (ii) si el valor registrado es –1, se abre un frasco de gas venenoso y se envenena el aire de la caja; (iii) en ambos casos, se corta la corriente y deja de registrarse la emisión de partículas. Aplicando el método de descripción de la Mecánica Cuántica habría que decir que la partícula, al interactuar con el contador, pasa, por una transición **R**, a uno de dos estados posibles, el correspondiente al valor +1, que le da leche al gato, o el correspondiente al valor –1, que le da muerte. Pero, obviamente, el contador, el gato y todo lo que hay en la caja son también objetos físicos que forman con el dispositivo emisor y la partícula emitida un sistema aislado cuyo estado evolucionará por un proceso **U** hasta interactuar con un objeto externo, por ejemplo, con un veterinario que mire el interior de la caja por una ventanita y compruebe, o bien que el gato se tomó la leche y está vivo y contento, o bien que el gato está muerto. Vista bajo esta perspectiva, la caja entera, con todo su contenido, tiene un estado representado por un vector en su espacio de fase, que varía de manera continua conforme a la ecuación de Schrödinger y que a partir de cierto momento puede siempre analizarse como la superposición de dos vectores, de igual amplitud, correspondientes a los dos valores posibles de una cantidad observable tomándole el pulso al gato, y que podemos llamar +1, si la caja contiene un gato vivo, y –1, si contiene un gato muerto. Adviértase que si el vector mediante el cual la Mecánica Cuántica describe el estado de la caja lo representa tal como es, hay que concluir que dicho estado ofrece a quien mida la cantidad descrita —digamos, llevándose a los oídos un estetoscopio conectado al pecho del gato— una probabilidad de 0,5 de comprobar que allí hay un gato muerto y una probabilidad de 0,5 de comprobar que hay un gato vivo; pero que la caja no encierra en realidad ni un gato vivo ni uno muerto, puesto que esta alternativa queda completamente indeterminada para quien mida una cantidad inconmutable con la anterior.

Hay algo muy desconcertante en esta idea de un estado físico que contiene un gato encerrado que no está vivo ni muerto, puesto que al abrir la caja, digamos, una semana después del experimento, si resulta que el gato ha muerto envenenado con el gas, el estado del cadáver indicará que falleció hace siete días. Se han propuesto numerosas soluciones para éste y otros problemas afines, pero, hasta donde yo puedo juzgar, ninguna es enteramente satisfactoria. Así opinan también Abner Shimony (1991) —que es quizás el único filósofo de la ciencia que ha hecho un aporte significativo a la física experimental— y el matemático Roger Penrose (1989). Penrose especula con la posibilidad de que una futura teoría cuántica de la gravitación logre explicar por qué en ciertas circunstancias el proceso continuo **U** da lugar a la transición discontinua **R**. Según Penrose, esta transición no puede estar confinada a las interacciones con aparatos de laboratorio construidos por el hombre, sino que debe producirse en toda clase de circunstancias, cuando una interacción física alcanza una cierta envergadura, que cualquier observación tendría que alcanzar para que sus resultados sean perceptibles. Pero desgraciadamente la teoría cuántica de la gravitación no existe todavía. El filósofo Jeffrey Bub (1988) cree, en cambio, que ya tenemos una teoría física que resuelve el problema. Se trata de la Teoría Cuántica de Campos, iniciada por Dirac antes de 1930 y elaborada desde 1947 por Feynman y otros. Esta teoría, que incorpora a la física cuántica los principios de la Teoría Especial de la Relatividad, adolece de graves dificultades conceptuales, pero, manipulada con ingenio y simpatía, arroja predicciones que la experiencia confirma con extraordinaria precisión. Según Bub, la teoría cuántica de campos implica que las cantidades físicas características de un sistema macroscópico, como lo es, por cierto, cualquier aparato de laboratorio, no son inconmutables con otras cantidades observables, de modo que se las puede considerar bien determinadas, no importa qué otras cantidades se pretenda medir. Así, el gato de Schrödinger puede considerarse definitivamente vivo o muerto, desde que se efectuó el experimento, aunque nadie lo haya mirado aún, y no hay que suponerlo oscilando en una superposición de esos dos estados. Más radical y en cierto modo heroica fue la solución intentada en 1957 por el físico Hugh Everett sin echar mano de más recursos que los contenidos en la Mecánica Cuántica en su forma original. Según él, cuando mido una cantidad observable me escindo en tantas vidas de ahí en adelante inconexas como vectores propios tenga la transformación lineal asociada a dicha cantidad. Lo que describimos como un proceso **R** es sólo la manifestación subjetiva de dicha escisión en la experiencia de uno de los observadores en que el observador original se escinde. De ahí la ilusión de discontinuidad, de "colapso del vector ψ", donde *objetivamente* éste prosigue en su evolución determinista regida por la ecuación de Schrödinger (proceso **U**). La solución de Everett es, sin duda, chocante, aunque muchos estudiosos la juzgan conceptualmente impecable.[10] Hace poco, el filósofo Richard Healey

10. En el texto parafraseo el pasaje de la obra de Everett (1957, p. 98) traducido a continuación:

> Cuando un observador efectúa una observación, el resultado es una superposición, cada uno de cuyos elementos describe un observador que ha percibido un valor determinado. De ahí en adelante no hay interacción entre los distintos elementos de la superposición (que describen al observador como habiendo percibido diferentes resultados), pues cada elemento sigue obedeciendo separadamente a la ecuación [de Schrödinger]. Cada observador individual descrito por un elemento particular de la superposición se comporta en el futuro de un modo completamente independiente de cualquier suceso que ocurra en los otros elementos, y no puede ya obtener información alguna con respecto a esos otros elementos (que son completamente inobservables para él).

(1989) ha publicado una original interpretación "interactiva" de la Mecánica Cuántica muy influenciada por Everett, pero sin su extravagancia ontológica.

Todos estos autores concuerdan en que —como indiqué arriba— no puede haber más de una teoría física fundamental, la cual debe dar cuenta en último término tanto de la evolución del sistema bajo estudio como de su interacción con los aparatos de medir. Esta es la exigencia que genera la paradoja del gato de Schrödinger. La exigencia es razonable, sobre todo si uno cree que la teoría física debe ofrecer una descripción unívoca de la "realidad", pero, hoy por hoy, constituye más bien un ideal programático: nadie sabe describir el estado de un aparato macroscópico de laboratorio mediante un vector en un espacio de Hilbert que evoluciona según la ecuación de Schrödinger, ni abordar en estos términos su interacción con los objetos microscópicos observados con ayuda de ese aparato. El gran físico y filósofo danés Niels Bohr aceptaba lisa y llanamente que así es la vida y daba por descontado que la descripción cuántica de los estados físicos sólo puede aplicarse a los microsistemas, y debe encuadrarse en la descripción clásica de los macrosistemas.

> El punto decisivo —escribe— es reconocer que la descripción del arreglo experimental y del registro de las observaciones debe hacerse en lenguaje corriente, adecuadamente refinado mediante la terminología física usual. Ésta es una simple exigencia lógica, puesto que con la palabra 'experimento' sólo podemos referirnos a un procedimiento respecto al cual seamos capaces de comunicarle a otros lo que hemos hecho y lo que hemos aprendido. En los experimentos reales, el cumplimiento de estos requisitos se asegura mediante el empleo, como instrumentos de medir, de cuerpos rígidos lo bastante pesados para admitir una descripción completamente clásica de sus posiciones y velocidades relativas. A este propósito también es esencial recordar que toda información inequívoca concerniente a objetos atómicos deriva de las marcas permanentes —como una mancha en una placa fo-

> tográfica causada por el impacto de un electrón— dejadas en los cuerpos que definen las condiciones experimentales. [. . .] La descripción de los fenómenos atómicos tiene en estos respectos un carácter perfectamente objetivo, en el sentido de que no se hace referencia explícita a ningún observador individual.
>
> (Bohr 1958, p. 3)

Bohr estaba convencido, al parecer, de que la inteligencia humana no puede lograr una descripción integral coherente de la realidad, sino que tiene que abordarla mediante esquemas conceptuales incompatibles pero complementarios. Esta opinión no debiera sorprender a nadie que haya tomado nota de la miserable pobreza de las descripciones naturalistas de la realidad humana; pero resulta chocante verla aplicada también a la naturaleza inanimada, el campo de estudios que la física ha deslindado para sí. Por desgracia, las explicaciones de Bohr al respecto no son demasiado claras. En nuestra generación, el físico y filósofo alemán Günther Ludwig ha elaborado una concepción de los "fundamentos de la mecánica cuántica" que constituye, según él, "una formulación sistemática, matemática y conceptual, del punto de vista original de Bohr, que supone que es necesario utilizar el modo clásico de descripción para describir el proceso de medición en la mecánica cuántica" (Ludwig 1981/85, vol. I, p. vii). Pero éste no es un lugar apropiado para examinarla.

Concluyo con una breve reflexión, inspirada por el mismo trabajo de Schrödinger donde figura el experimento con el gato: La evolución continua **U** de un sistema cuántico no es *sucedida* mágicamente por la transición discontinua **R** cuando el sistema interactúa con un aparato de medir; la interacción simplemente pone fin al aislamiento del sistema. Por lo tanto, el vector representativo del estado del sistema *aislado* pierde su razón de ser. Después de la interacción, sí, puede ocurrir que se restablezca el aislamiento del sistema y haya lugar nuevamente para representar su estado mediante un vector en su espacio de fase. Pero el nuevo vector no ha de concebirse como producto de una transformación discontinua del vector anterior, que en la interacción simplemente dejó de existir. El físico cuántico ofrece, pues, una descripción de la realidad objetiva, dentro de los límites que se ha propuesto. Pero tales límites, por cierto, no existen en "el mundo en sí", sino que el físico los marca en el acontecer natural mediante la decisión de desglosar una parte del mismo para contemplarla separadamente y las disposiciones prácticas que adopta para aislarla (hasta cierto punto). La Mecánica Cuántica —lo mismo que la clásica— no se refiere al observador humano, sino a procesos físicos independientes de él, pero presupone ostensiblemente la intervención teórica y práctica del hombre en la demarcación de dichos procesos.

3

Hay otro campo de la física contemporánea en el cual la presencia del hombre en el mundo está siendo considerada no ya sólo como condición para la *descripción* científica de los fenómenos, sino como ingrediente insoslayable del propio *acontecer* natural. Después de 25 siglos de cosmología especulativa, tenemos por fin en el siglo XX una cosmología empírica, es decir, una disciplina científica que estudia a grandes rasgos la evolución y la estructura global del universo a la luz de ciertas observaciones astronómicas, interpretadas conforme a nuestras mejores teorías físicas, es decir, la teoría de la gravitación de Einstein y las teorías cuánticas de las otras fuerzas naturales (véase el Capitulo 2). Aunque éstas no son estrictamente compatibles con aquélla, al nivel de imprecisión a que trabaja la cosmología actual no es ilícito combinarlas.[11] Pero su aplicación conjunta genera muy distintos "modelos de universo", según el valor que se asigne a las constantes características de cada teoría (constante de gravitación, constante de Planck, carga eléctrica del electrón, etc.). Esto implica que, entre todos los mundos posibles de acuerdo con nuestras mejores teorías físicas, aquél en que vivimos es bastante excepcional. Para minimizar la arbitrariedad en la selección del modelo representativo del universo real, algunos eminentes cosmólogos invocan lo que se ha dado en llamar el Principio antrópico,[12] que propongo enunciar así:

PA Un modelo cosmológico es *científicamente* posible si, además de ajustarse a las leyes generales propuestas por nuestras mejores teorías científicas, reúne los requisitos necesarios para la vida de organismos capaces de *practicar la ciencia*.

Bajo este principio, disminuye muchísimo el repertorio de opciones abiertas a un Dios que decidiera crear un mundo regido por esas leyes generales.

No es de extrañar que, dado lo singular de su tema, los cosmólogos invoquen principios inusitados en otros campos de la ciencia. Inicialmente postularon a priori lo que E. A. Milne llamaba el Principio cosmológico (por antonomasia), conforme al cual el universo ofrece aproximadamente el mismo aspecto a cualquier observador. La adopción de este principio parecía indispensable para justificar la aplicación al universo entero de teorías científicas controladas solamente

11. Por ejemplo, Hawking (1975) utilizó la Mecánica Cuántica para calcular la media vida de un hoyo negro, a pesar de que estos objetos, cuya existencia probable es una consecuencia de la teoría einsteiniana de la gravitación, no pueden definirse siquiera en el espacio-tiempo plano y simplemente conexo que la Mecánica Cuántica da por supuesto.

12. Véase la obra enciclopédica de Barrow y Tipler (1986).

por nuestra experiencia terrestre.[13] Consecuentes con esta idea, Hermann Bondi y Thomas Gold exigieron que el universo presentase el mismo aspecto desde cualquier punto de vista *en todas las épocas* (Principio Cosmológico Perfecto o PCP), una exigencia que, combinada con el fenómeno del mutuo alejamiento de las galaxias, les indujo a suponer que la materia estaba siendo creada continuamente —poquito a poco— en todas partes (sólo así podía mantenerse la densidad media constante requerida por el PCP). Esta hipótesis nunca fue popular en la comunidad científica, que respiró aliviada cuando, en los años 60, entró en conflicto con algunos fenómenos recién descubiertos. Desde entonces, prevalece la idea de que el universo cambia dramáticamente en el curso del tiempo. En particular, la radiación térmica del trasfondo detectada por Penzias y Wilson (1965) y su interpretación cosmológica como remanente de una época en que todo el universo tenía una temperatura uniforme enormemente mayor que el promedio actual obligan a pensar que la época en que puede haber rincones —como nuestro planeta— aptos para hospedar organismos vivos es comparativamente breve.

La introducción del Principio antrópico en la cosmología suele atribuirse a Robert Dicke (1961), quien evidentemente lo invoca —aunque sin nombrarlo— en su polémica

---

13. Más prudente me parece adoptar con este propósito un principio puramente pragmático, como la cuarta "Regla del Filosofar" enunciada por Newton al comienzo del Libro IV de sus *Principia*:

> *In philosophia experimentali, propositiones ex phænomenis per inductionem collectæ, non obstantibus contrariis hypothesibus, pro veris aut accurate aut quamproxime haberi debent, donec alia occurrerint phænomena, per quæ aut accuratiores reddantur aut exceptionibus obnoxiæ.*
>
> *En la filosofía experimental, las proposiciones colegidas de los fenómenos por inducción deben ser tenidas por exacta o muy aproximadamente verdaderas, sin hacer caso de hipótesis contrarias, hasta que ocurran otros fenómenos que las hagan más exactas o las sometan a excepciones.*
>
> (Newton, *Principia*, p. 555)

contra ciertas especulaciones de Paul Dirac.[14] El argumento de Dicke supone una aguda conciencia de lo extraordinarias que son, aun dentro de este mundo nuestro, las circunstancias en que es posible la vida. Sea c la velocidad de la luz en el vacío, e la carga eléctrica del electrón, G la constante gravitacional y m_e y m_p las masas del electrón y del protón, respectivamente. Entonces, el diámetro atribuido clásicamente al electrón es aproximadamente igual a $2e^2m_e^{-1}c^{-2}$, de modo que el tiempo t_e que necesita la luz para atravesarlo es aproximadamente igual a $2e^2m_e^{-1}c^{-3}$. En 1937, Dirac había señalado que, si t_0 denota "la edad del universo" —es decir, el tiempo trascurrido desde el momento en que la densidad media de la materia excedía cualquier valor asignable— según el estimado de Hubble (a lo sumo un 20% de los estimados actuales), el cociente t_0/t_e y el cociente e^2/Gm_pm_e de la atracción eléctrica y la atracción gravitacional entre un protón y un electrón son ambos aproximadamente iguales a 10^{39}. Según Dirac, sería extraordinariamente inverosímil que dos números físicamente significativos tan enormes tuviesen el mismo orden de magnitud *por casualidad*. La igualdad entre ellos se nos presenta como aproximada porque el valor que nuestras mediciones le atribuyen a las cantidades citadas dista mucho de ser exacto, pero es razonable suponer que tenemos que habérnosla con una igualdad estricta, consecuencia de alguna ley natural desconocida. Ahora bien, para que la ecuación

$$e^2/Gm_pm_e = t_0/t_e = \tfrac{1}{2}t_0e^{-2}m_ec^3 \tag{9.1}$$

exprese una ley de la naturaleza es necesario que la "edad del universo" representada por t_0 sea en todo momento

14. Seis años antes de que el trabajo de Dicke apareciera en *Nature*, una revista filosófica había publicado un artículo que pretende explicar la tridimensionalidad del espacio mostrando que la vida no sería posible en un espacio de una, dos o más de tres dimensiones (G. J. Whitrow 1955). Véase también la nota 15.

proporcional a alguna de las otras cantidades en juego. Consciente de la dificultad teórica de admitir la variabilidad de la velocidad de la luz o de la carga o la masa del electrón o del protón, Dirac concluyó que la cantidad que varía (inversamente) con la "edad del universo" es la "constante" de gravitación G. Esta es la especulación impugnada por Dicke, quien muestra que la igualdad *aproximada* observable entre el miembro izquierdo y el miembro derecho de la ecuación (9.1) no resulta tan inverosímil como parece, si tenemos en cuenta que toda *medición* de las cantidades en cuestión tiene que ocurrir dentro del breve período de la historia del universo en que es físicamente posible la ciencia física. Mediante una detallada consideración de los procesos astrofísicos que presupone la vida basada en la química del carbono, Dicke concluye que la investigación científica no podría haber comenzado mucho antes de que la "edad del universo" alcanzase el valor t_0 derivable de la ecuación (9.1). Por esta razón, era altamente probable que al escribirse por primera vez esa ecuación, la cantidad t_0 que ella presenta como producto de puras *constantes* de la naturaleza coincidiera aproximadamente con la "edad del universo" en ese momento.[15]

---

15. Años antes que Dicke, Edward Teller (1948) había combatido la tesis de la variabilidad de G con un argumento que puede interpretarse antrópicamente. Como la luminosidad del sol $L_\odot$ es proporcional a G^7, y el radio r de la órbita terrestre —en virtud de la ley de conservación del momento angular— es proporcional a G^{-1}, si G disminuyera con el trascurso del tiempo la temperatura sobre la superficie terrestre, que es proporcional a $(L_\odot r^{-2})^{1/4} \propto G^{9/4}$, habría sido en el pasado bastante mayor de lo que normalmente se supone. Teller calculó que si G es —como pretendía Dirac— inversamente proporcional a la "edad del universo" y ésta se estima, con Hubble, en 2 mil millones de años, 400 millones de años atrás la temperatura media a nivel del mar habría sido superior a los 370° C y los océanos se habrían evaporado, un resultado claramente incompatible con nuestra presencia sobre la tierra (y también, por cierto, con el testimonio de la paleontología).

Antes de examinar el significado y alcance del Principio antrópico presentaré al menos en escorzo un ejemplo más ambicioso de su uso en cosmología. La radiación de trasfondo descubierta por Penzias y Wilson es casi perfectamente isotrópica (esto es, casi igual en todas las direcciones). Como no habría modo de explicar que nuestro planeta en movimiento se encuentre siempre en el centro absoluto de recepción de la radiación cósmica, entendemos que la misma isotropía se observaría en todo lugar, reflejando la circunstancia de que en ninguna parte hay direcciones privilegiadas o, como diremos, que *el universo mismo es isotrópico*. Se trata, claro está, de isotropía global, a gran escala, ya que localmente y a la escala humana el universo es, por cierto, anisotrópico: aquí donde estoy tengo una mesa cubierta de papeles a mi izquierda, una computadora al frente, una alfombra bajo los pies. Collins y Hawking (1973) abordan la pregunta "¿Por qué es isotrópico el universo?" Por un teorema de Schur (1886), la isotropía del universo implica que éste es gravitacionalmente homogéneo (si satisface, dentro de un margen de error razonable, la teoría geométrica de la gravedad de Einstein). ¿Cómo explicar la presencia de inhomogeneidades locales —galaxias, estrellas, etc.— en un universo homógeneo? Los primeros cosmólogos que atacaron este problema introducían pequeñas perturbaciones estadísticas en un modelo de universo inicialmente homogéneo e isotrópico —un "universo de Friedman-Robertson-Walker" o "universo FRW"— y calculaban la probabilidad de que fueran aumentando con el trascurso del tiempo. Como resultó que el crecimiento probable de pequeñas perturbaciones en un universo FRW sería muy lento y no permitiría la formación de las galaxias que conocemos, Charles Misner (1968) propuso partir de un universo caótico, con anisotropías e inhomogeneidades de todas clases, y mostrar que éstas se irían eliminando por diversos procesos de disipación, hasta dejar sólo las que ahora se observan. De entrada, Misner (1968a) consideró la evolución de un universo inicialmente anisotrópico pero homogéneo —matemáticamente más manejable que el caso general de un universo caótico— y sostuvo que la viscosidad de los neutrinos reduciría drásticamente cualquier anisotropía inicial. Su razonamiento fue criticado por varios autores, entre ellos el propio Collins. El trabajo de Collins y Hawking también concentra su atención en el mismo caso, que examina desde un punto de vista geómetrico. Para facilitar la exposición distinguiré dos clases de modelos cosmológicos de la teoría einsteiniana de la gravitación: una clase $\mathscr{H}$ de modelos inicialmente homogéneos —isotrópicos o no— y una clase $\mathscr{C}$ de modelos inicialmente inhomogéneos; en cada clase distinguiré asimismo la respectiva subclase de modelos que evolucionan hacia la isotropía, $\mathscr{I} \subset \mathscr{H}$ y $\mathscr{M} \subset \mathscr{C}$. En la parte central de su artículo, Collins y Hawking demuestran una serie de teoremas geométricos en virtud de los cuales los universos de la clase $\mathscr{H}$ son esencialmente inestables y la menor perturbación puede destruir su homogeneidad.[16] Ello implica que $\mathscr{I}$ sólo puede ser una parte insignificante ("un conjunto de medida cero") de los modelos cosmólogicos. Con respecto a $\mathscr{M}$, ello no implica nada, pero Collins y Hawking consideran inverosímil, a la luz de lo dicho, que una parte significativa de la clase $\mathscr{C}$ evolucione hacia una isotropía duradera.[17] Así pues, ya sea que nuestro universo

16. El lector con un poco de cultura matemática entenderá mejor el sentido de estas aseveraciones a la luz de lo siguiente: Collins y Hawking definen una topología razonable sobre el conjunto de los modelos cosmológicos y demuestran que ningún abierto de esa topología intersecta la clase $\mathscr{H}$. Ello implica que, si $h \in \mathscr{H}$, todo entorno de h contiene universos de clase $\mathscr{C}$ y la menor perturbación de h puede convertirlo en uno de éstos. (Los términos 'topología', 'entorno' y 'abierto' se definen en el Vocabulario Matemático *s.v.* TOPOLOGÍA).

17. Sobre la subclase que he llamado $\mathscr{M}$, Collins y Hawking hacen el siguiente comentario: "Esto [el resultado trascrito en la nota 16—R.T.] no prueba que no haya un conjunto abierto de datos iniciales inhomogéneos que genere modelos aproximadamente homogéneos e

empezara siendo homogéneo o no, es una tremenda coincidencia que tenga ahora el grado de isotropía que manifiesta. Collins y Hawking concentran su atención en la clase $\mathcal{H}$. Los modelos de esta clase se dividen en tres grupos, $\mathcal{H}_>$, $\mathcal{H}_<$ y $\mathcal{H}_=$, según que se expandan con una velocidad superior, inferior o exactamente igual a la velocidad mínima necesaria para evitar que el modelo, al cabo de un período de expansión, empiece a contraerse ("velocidad de escape"). Collins y Hawking demuestran que los modelos de la subclase $\mathcal{H}_>$ a la larga no tienden, por regla general, a la isotropía. Por su parte, los modelos de la subclase $\mathcal{H}_<$ que se recontraen, no disponen del tiempo necesario para acercarse todo lo que se quiera a la isotropía. Por lo tanto, si el mundo real ha de representarse mediante un modelo de la clase $\mathcal{H}$ es altamente probable que se trate de uno de la subclase $\mathcal{H}_=$. Los universos de dicha subclase son obviamente una excepción entre los universos homogéneos (puesto que hay una infinitud indenumerable de velocidades concebibles y la velocidad de escape es sólo una de ellas); pero no son una excepción, sino más bien la regla, entre los universos en que es posible la vida humana. Como dicen Collins y Hawking en el párrafo final de su artículo:

> En los universos con velocidad menor que la de escape, las pequeñas perturbaciones de la densidad no tendrán tiempo para desarrollarse hasta formar galaxias y estrellas antes del recolapso del universo. En los universos con velocidad mayor que la de escape, las pequeñas perturbaciones de la densidad excederán la velocidad de escape y no formarán sistemas acotados. Sólo en los universos con velocidad muy próxima a la de escape cabe esperar que se desarrollen galaxias, y hemos encontrado que tales universos en general tienden a la isotropía. Como parecería que la existencia de galaxias es una condición necesaria para el desarrollo de una vida in-

---

isotrópicos, pero lo hace parecer muy improbable, ya que uno esperaría que las inhomogeneidades produzcan anisotropía más bien que isotropía" (1973, p. 318).

> teligente, la respuesta a la pregunta "¿Por qué es isotrópico el universo?" es "Porque estamos aquí".
>
> (p. 334)

En las publicaciones sobre el Principio antrópico se acostumbra distinguir dos variantes del mismo, una "débil" y otra "fuerte". No siempre se formulan del mismo modo. Siguiendo a Brandon Carter, quien al parecer fue el primero en distinguirlas, las enunciaré así:

> PRINCIPIO ANTRÓPICO DÉBIL (PAD). *Lo que podemos esperar observar tiene que estar restringido por las condiciones necesarias de nuestra presencia como observadores.*[18]

18. "What we can expect to observe must be restricted by the conditions necessary for our presence as observers" (B. Carter 1973, p. 291). No me parece que este enunciado sea lógicamente equivalente al de Barrow y Tipler (1986, p. 16):

> WEAK ANTHROPIC PRINCIPLE (WAP): *The observed values of all physical and cosmological quantities are not equally probable but they take on values restricted by the requirement that there exist sites where carbon-based life can evolve and by the requirement that the Universe be old enough for it to have already done so.*
>
> PRINCIPIO ANTRÓPICO DÉBIL (PAD): *Los valores observados de todas las cantidades físicas y cosmológicas no son igualmente probables, sino que toman valores restringidos por el requisito de que haya sitios donde pueda evolucionar la vida basada en el carbono y por el requisito de que el universo tenga ya la edad suficiente para que eso ya haya ocurrido.*

¿Qué quiere decir que "los valores *observados* de todas las cantidades físicas . . . no son igualmente probables"? Lo natural es entender que los autores están diciendo (*a*) que algunos valores observados son más probables que otros valores observados. Pero tal vez han querido decir (*b*) que cualquier valor observado es más probable que los valores alternativos, concebibles pero no observados, de la respectiva cantidad física. Ahora bien cualquier valor *correctamente* observado, solamente por haberlo sido, tiene probabilidad 1, *igual* a la de cualquier otro valor correctamente observado y *mayor o igual* que la de cualquier valor no observado. Según esto, PAD de Barrow y Tipler es un disparate en la interpretación (*a*) y una trivialidad en la interpretación (*b*).

> PRINCIPIO ANTRÓPICO FUERTE (PAF). *El universo* ***tiene que*** *ser tal que admita en su seno la creación de observadores en alguna etapa.*[19]

El PAD parece calculado para dar cuenta de los razonamientos de Dicke y de Collins y Hawking en los ejemplos citados, que designaré con Δ y Γ, respectivamente. En ambos casos se registraron mediciones —de la intensidad de la radiación de trasfondo en diversas direcciones en Γ, de las constantes c, e, m_p y m_e en Δ— que parecían extraordinarias en comparación con lo que supuestamente se podría observar en un momento cualquiera (Δ), o en un universo relativista típico (Γ). Pero ese efecto se disipa si se tiene en cuenta que ni en un universo relativista *típico*, ni en *cualquier* época de la historia del nuestro habría vida inteligente y que, si no la hay, de hecho no sería posible observar nada. *Observacio-*

19. "The Universe *must* be such as to admit the creation of observers within it at some stage" (Carter 1973, p. 294). B. Kanitscheider 1984, p. 275, ha juzgado oportuno darle al PAF una formulación aún más fuerte:

> *Eine Welt muß in ihren Gesetzen und Anfangsbedingungen (in ihren nomologischen und kontingenten Strukturen) so beschaffen sein, daß sie zu irgendeinem Zeitpunkt ihrer Lebensdauer einen Beobachter hervorbringt.*
>
> *Un mundo tiene que estar constituido de tal modo en cuanto a sus leyes y condiciones iniciales (sus estructuras nomológicas y contingentes) que en algún momento de su historia produzca un observador.*

Mediante el uso del artículo indefinido, Kanitscheider deja bien en claro que el PAF no se refiere al mundo real, cuyo nombre tiene que ir precedido —en alemán como en castellano— por el artículo definido, sino a los modelos científicos del mundo. Como indico más adelante en el texto, creo que el enunciado de Carter debe también entenderse en este sentido. En cambio, no me parece admisible el fortalecimiento introducido por Kanitscheider. En su formulación no basta, como en la de Carter, que un modelo cosmológico *permita* el surgimiento de un observador en su seno; se pide además que esté *determinado* de tal modo que dicho surgimiento *ocurra*. Ningún modelo cosmológico propuesto hasta la fecha llena este requisito.

nes sólo puede haber allí donde hay *observadores*, y en cuanto las expectativas se ciñen a esta condición las mediciones consideradas en los casos Δ y Γ resultan ser naturales y nada sorprendentes. Todo esto es tan obvio que nadie disputa la legitimidad del PAD, sino a lo sumo la conveniencia de solemnizarlo con el nombre de "principio". En cambio, el PAF es resistido por algunos filósofos. Sin embargo, si se lo toma al pie de la letra, es trivialmente verdadero e incluso innecesariamente cauteloso: si 'el universo' designa el universo, es claro que tiene que ser tal que admita el surgimiento de observadores no ya sólo "en alguna etapa", sino precisamente en la etapa actual, puesto que el universo en efecto los contiene y a cada momento nacen otros. Pero seguramente no es así como hay que entenderlo. El PAF no pretende informarnos lo que ya sabemos acerca del mundo en que vivimos. Más bien, utiliza este saber para regular la elección de un modelo físico-matemático que lo represente: El *modelo* de universo propuesto por la cosmología tiene que ser compatible con la presencia de observadores en su seno.

Entendido así, el PAF es tan evidente como el PAD y la oposición que suscita es desconcertante. Con todo, hay varios motivos para ella. En primer lugar, el PAF pone punto final al pensamiento homogéneo sobre la naturaleza que —como vimos al comienzo— Whitehead atribuía a la ciencia natural. Tal desenlace repugna a los partidarios de lo que Putnam (1982) llama "realismo metafísico", que quisieran todavía contemplar el objeto de la física limpio de contaminación humana, "desde el punto de vista de Dios". Los devotos de este punto de vista entenderán el PAF como una pretendida norma a la que Dios habría estado sujeto a la hora de la creación del mundo, lo que les permite refutarlo por *reductio ad ridiculum*.

Un segundo motivo para resistir el empleo del PAF en argumentos científicos es la creencia de que una explicación científica tiene que ser causal. Obviamente, cuando Collins y Hawking afirman que el universo es isotrópico *porque* estamos aquí no quieren decir que nuestra presencia ahora sea la *causa* de que el universo esté evolucionando a partir de tales o cuales condiciones desde hace 15 mil millones de años. Pero si han logrado probar que nuestra presencia ahora constriñe las condiciones iniciales del universo dentro de un pequeño entorno de los valores que pueden inferirse de los datos observados, usando nuestras mejores teorías, entonces no cabe duda de que han ayudado a entender que esos valores inferidos sean aproximadamente los que son, por muy excepcionales que parezcan a primera vista. Si fuesen diferentes, no estaríamos aquí para comprobarlo. No sería ésta la primera vez que la física matemática prescinde de la explicación causal, preferida en la vida diaria, y apela a otros recursos intelectuales. Desde luego, la representación de los fenómenos como procesos deterministas gobernados por ecuaciones diferenciales (PDGED) —considerada, con justicia, como la cumbre del pensamiento físico-matemático— no provee explicaciones causales. En efecto, cualquier etapa instantánea de un PDGED determina —y, por ende, explica— no sólo el *futuro* del mismo sino también su *pasado*. Además, en agudo contraste con la explicación causal propiamente dicha, si *s* es un suceso comprendido en un PDGED, no es posible asignarle una causa *inmediata*, pues entre *s* y cualquier suceso anterior *c*, suficiente para determinar a *s*, hay siempre otros sucesos del PDGED que median entre *c* y *s*.

Por último, algunos autores reaccionan a las explicaciones antrópicas como un miura ante un trapo rojo porque las entienden como explicaciones teleológicas, tras las cuales ven asomar la cola y los cuernos de la teología. Pero los principios antrópicos son más bien un antídoto contra la tentación de explicar las cosas por un pretendido propósito. Por ejemplo, en los casos Δ y Γ considerados arriba, mientras uno piense que la configuración cósmica observada es una coincidencia inverosímil, puede sentirse inclinado a creer que ella obedece a un designio. Pero en cuanto la reflexión antrópica lo haga darse cuenta de que sólo una configuración parecida a esa podía ser observada, pues otra significativamente distinta habría excluido al observador, uno comprenderá que aquí la teleología sobra.[20] El accidente insoslayable es que existimos, pero una vez que nuestra existencia es asumida —como no puede menos que serlo— como el *ποῦ στῶ* del conocimiento, cualquier característica de las cosas que sea demostradamente una condición necesaria suya puede, en virtud de ello, darse por descontada.

20. En este respecto, el PAF y el PAD funcionan en cosmología como el Principio de selección natural en la biología darwiniana. No hace falta suponer un designio para entender la admirable adaptación de los seres vivos a las demandas del ambiente, si los organismos peor adaptados perecen sin descendencia. Del mismo modo, tampoco hay que invocar un designio para entender que el valor medido de las constantes naturales caiga dentro del estrecho margen compatible con la vida, puesto que, de no ser así, no se llegaría a medirlas.

Vocabulario matemático

APLICACIONES Y CONJUNTOS. La matemática del siglo XX se vale de estos dos conceptos para definir con precisión todos los demás. No tendría sentido tratar de definirlos, pero su contenido se puede expresar también con otras palabras.

Un *conjunto* (A. *Menge*, F. *ensemble*, I. *set*) es una colección de objetos cualesquiera. La expresión '$x \in A$' indica que el objeto x es un elemento del conjunto A. Cuando atendemos a un conjunto como tal sólo consideramos el hecho de que cada elemento posee una identidad propia que lo distingue de todos los demás, pero no atendemos ni a sus propiedades ni a sus relaciones con otros elementos. Se debe tener presente que, so pena de contradicción, no puede decirse que cualquier *multitud* de objetos constituya un *conjunto*. Por ejemplo, no hay un conjunto de todos los conjuntos. Un conjunto puede describirse mediante una lista —por ejemplo, $\{1,5,9\}$ es el conjunto cuyos elementos son los números 1, 5 y 9— o mediante una condición —por ejemplo, el conjunto $\{x\colon x$ es un número entero y $x^2 < 20\}$ reúne los objetos x que cumplen la condición indicada, o sea, los enteros $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4$ y -4. Convenimos que cada objeto forma un conjunto "unitario" cuyo único elemento es él y que existe el "conjunto vacío" $\varnothing = \{x\colon x \neq x\}$. Si todos los elementos de un conjunto A son a la vez elementos de un conjunto B, decimos que B *incluye* a A y que A es un *subconjunto* (o *parte*) de B, abreviado $A \subseteq B$. Nótese que según esta definición, cualquiera que sea el conjunto A, tenemos que $\varnothing \subseteq A \subseteq A$. Reconociendo que A es una parte de A sólo en una acepción *impropia* de la palabra 'parte', decimos que A es una *parte propia* de B si $A \subseteq B$ y $A \neq B$. Si $A \subseteq B$, el conjunto $B\setminus A$ de todos los elementos de B que no son elementos de A se llama el *complemento de A con respecto a B*. La *unión* $A \cup B$ de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los objetos que son elementos de A o de B. La *intersección* $A \cap B$ de A y B es el conjunto de todos los objetos que son elementos de A y de B.

Una *aplicación* (A. *Abbildung*, I. *mapping*) es una correspondencia entre dos conjuntos —el *dominio* y el *codominio* de la aplicación— que le asigna a cada elemento del dominio un y sólo un elemento del codominio. Escribimos $f: A \to B$ para referirnos a una aplicación f con dominio A y codominio B. Decimos que f aplica A *en* B. Los elementos de B asignados por f a elementos de A constituyen el *alcance* de f, llamado también la *imagen* de A por f y designado con $f(A)$. Si $f(A) = B$, esto es, si *cada* elemento de B es asignado por f a *algún* elemento de A, decimos que f aplica A *sobre* B. Si f asigna al elemento $a \in A$ el elemento $b \in B$, decimos que b es el *valor* de f en el *argumento* a, abreviado $b = f(a)$. La correspondencia entre argumento y valor suele expresarse así: $x \mapsto f(x)$.

Si f asigna cada elemento de su alcance a un solo elemento del dominio —en otras palabras, si $x \neq y$ implica que $f(x) \neq f(y)$— decimos que f *inyecta* A en B y que f es una *inyección* o una *aplicación inyectiva*. Obviamente, toda aplicación inyectiva $f{:}A \to B$ determina una aplicación *inversa* $f^{-1}{:}f(B) \to A$. Si f inyecta A sobre B decimos de f es un *biyección* o una *aplicación biyectiva*. En tal caso, obviamente, la inversa f^{-1} inyecta B sobre A. Si $f{:}A \to B$ y $g{:}B \to C$ son dos aplicaciones, la *aplicación compuesta* $g \circ f$: $A \to C$ asigna a cada elemento $a \in A$ el valor de g en $f(a)$. (Véanse las figs. 2, 5 y 6).

Una aplicación cuyos valores son números de una misma clase —naturales, enteros, racionales, reales, complejos— suele llamarse una *función*.

CONEXIÓN LINEAL. No puedo dar aquí una definición de este concepto. Baste decir que en una variedad diferenciable premunida de una conexión lineal es posible distinguir entre curvas —llamadas *geodésicas*— que avanzan siempre en la misma dirección y curvas que cambian de dirección (y dondequiera se pueda hacer este distingo será posible reconocer una conexión lineal). Levi-Cività (1917) demostró que en una variedad riemanniana hay siempre una conexión lineal compatible con la métrica: las geodésicas determinadas por esa conexión coinciden con las curvas *extremas* (de longitud máxima o mínima) determinadas por la métrica.[1]

CUERPO DE LOS COMPLEJOS. Sea $\mathbb{R}$ el cuerpo de los reales (*véase*). El cuerpo $\mathbb{C}$ de los complejos puede definirse como sigue. Un elemento de $\mathbb{C}$ —un *número complejo*— es cualquier par ordenado de números reales: $\langle a,b\rangle \in \mathbb{C}$ si y sólo si $a,b \in \mathbb{R}$. En vez de $\langle a,b\rangle$ escribimos (a,b). La suma y la multiplicación de complejos se define como sigue: $(a,b) + (c,d) = (a+b,c+d)$, $(a,b) \times (c,d) = (ac+bd,ad–bc)$. Es fácil ver que en $\mathbb{C}$, el elemento neutro de la suma es $(0,0)$ y el elemento neutro de la multiplicación es $(1,1)$. El lector puede tratar de probar que la estructura así definida es efectivamente un cuerpo.

CUERPO DE LOS REALES. Definamos primero el concepto de *cuerpo* (A. *Körper*, I. *field*). Sea $\langle K,\oplus\rangle$ un grupo abeliano, con elemento neutro $\mathbf{0} \in K$ (*estos términos se explican bajo* GRUPO DE TRANSFORMACIONES). Suponemos que K contiene por lo menos un elemento distinto de $\mathbf{0}$. Sea $\otimes: K \times K \to K$ una aplicación tal que (i) para cualquier $k \in K$, $k \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0} \otimes k = \mathbf{0}$, (ii) si $\otimes'$ es la restricción de $\otimes$ a $K\setminus\{\mathbf{0}\} \times K\setminus\{\mathbf{0}\}$, $\langle K\setminus\{\mathbf{0}\},\otimes'\rangle$ es un grupo abeliano con elemento neutro $\mathbf{1}$, y (iii) si $a,b,c \in K$, $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c) = (b \oplus c) \otimes a$. Entonces, $\langle K,\mathbf{0},\mathbf{1},\oplus,\otimes\rangle$ es un *cuerpo*. Sea $a \in K$. Si $a \neq \mathbf{0}$, a tiene dos inversos: uno por $\oplus$, que designamos con $-a$, y uno por $\otimes$ que designamos con a^{-1}. Usando este simbolismo, es fácil comprobar que, si K es el conjunto

1. En Torretti 1983, pp. 265-280, di una explicación concisa pero bastante exacta del concepto de conexión lineal.

de todas las fracciones (propias e impropias), $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ son el cero y el uno, y $\oplus$ y $\otimes$ son, respectivamente, la suma y la multiplicación de fracciones, $\langle K,\mathbf{0},\mathbf{1},\oplus,\otimes\rangle = \mathbb{Q}$, el *cuerpo de los racionales*. El cuerpo $\mathbb{R}$ de los reales se suele definir como una extensión de $\mathbb{Q}$, pero aquí daré la definición, menos intuitiva pero mucho más elegante, propuesta por David Hilbert en 1900.

Sea $\mathbb{K} = \langle K,\mathbf{0},\mathbf{1},\oplus,\otimes\rangle$ un cuerpo cualquiera. Supongamos que K incluye una parte no vacía $P \subseteq K$ tal que (i) si $a \in P$ y $b \in P$, $a \oplus b \in P$ y $a \otimes b \in P$, y (ii) si $a \in K$, a cumple con una y sólo una de las tres condiciones siguientes: $a \in P$, $a = \mathbf{0}$, o $-a \in P$. En tal caso, decimos que P es el conjunto de los elementos *positivos* de $\mathbb{K}$ y que $\mathbb{K}$ es un cuerpo *ordenado*. Esta denominación se justifica porque la existencia de P determina en $\mathbb{K}$ la relación de orden lineal $<$ definida por: $a < b$ si y sólo si $b \oplus -a \in P$. Leemos 'a es menor que b' donde está escrito '$a < b$' y escribimos '$a \leq b$' en vez de '$a < b$ o $a = b$'. Decimos que un elemento $a \in K$ es una *cota superior* del conjunto $C \subseteq K$ si $c \leq a$ para todo $c \in C$. Si existe una cota superior de C, decimos que C es un conjunto *acotado por arriba*. En particular, decimos que a_0 es el *supremo* o *cota superior mínima* de C si a_0 es una cota superior de C y cualquier *otra* cota superior de C es mayor que a_0. (Los conceptos de conjunto *acotado por abajo*, *cota inferior* e *ínfimo* o *cota inferior máxima* se definen en forma análoga). Decimos que el cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ es *completo* si todo conjunto $C \subseteq K$ acotado por arriba tiene una cota superior mínima. Decimos que el cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ es *arquimédico* si, cualesquiera que sean los elementos a, $b \in \mathbb{K}$, si $a \in P$ (esto es, si $\mathbf{0} < a$) siempre existe un entero positivo n tal que b es menor que n veces a (vale decir, $b < a \oplus a \oplus \ldots \oplus a$, con $\oplus$ repetido $n-1$ veces).

Se puede demostrar que si $\mathbb{K} = \langle K,\mathbf{0},\mathbf{1},\oplus,\otimes\rangle$ y $\mathbb{K}' = \langle K',\mathbf{0}',\mathbf{1}',\oplus',\otimes'\rangle$ son dos cuerpos ordenados, completos y arquimédicos hay una biyección $f{:}K \to K'$ que preserva todas las propiedades estructurales de $\mathbb{K}$ (específicamente $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}'$, $f(\mathbf{1}) = \mathbf{1}'$, $f(a \oplus b) = f(a) \oplus' f(b)$, $f(a \otimes b) =$

$f(a) \otimes' f(b)$). Esto quiere decir que todos los cuerpos ordenados, completos y arquimédicos son isomórficos (*véase* ISOMORFISMO) y, por lo tanto, pueden considerarse como realizaciones de una estructura única. A esa estructura —sin duda la más importante de la matemática clásica— la llamamos *el cuerpo de los reales* y la designamos con el signo $\mathbb{R}$. (Obsérvese que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo ordenado arquimédico, pero no completo: el conjunto de todas las fracciones cuyo cuadrado es menor que 2 está acotado por arriba, pero no tiene una cota superior mínima).

DERIVADA. *Véase* DIFERENCIABLE (APLICACIÓN).

DIFERENCIABLE (APLICACIÓN). En este libro se alude repetidas veces a los conceptos de aplicación diferenciable y derivada de una aplicación. La mayoría de los lectores los conocen probablemente en su forma más simple, aplicable a las funciones con argumentos y valores en $\mathbb{R}$. Aquí se dará una definición aplicable a cualquier aplicación $f:\mathcal{V} \to \mathcal{W}$, donde $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ son espacios de Banach (*véase*).

Sean, pues, $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ espacios de Banach, $\mathcal{U}$ un abierto de $\mathcal{V}$ y $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ un vector cualquiera. Consideremos dos aplicaciones $f_1:\mathcal{U} \to \mathcal{W}$ y $f_2:\mathcal{U} \to \mathcal{W}$. Porque $\mathcal{U}$ es un abierto de la topología de $\mathcal{V}$ (*véase* ESPACIO DE BANACH, al final), si r es cualquier número real positivo bastante pequeño, el conjunto

$$\{\|f_1(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})\| : \|\mathbf{u} - \mathbf{x}\| < r\}$$

es un conjunto no vacío y acotado de números reales positivos, que tiene, por lo tanto, una cota superior mínima $\mu(r)$ (*véase* CUERPO DE LOS REALES). Diremos que f_1 y f_2 son *tangentes en* $\mathbf{u}$ si para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un número real $\delta > 0$ tal que $r < \delta$ implica que $\mu(r)/r < \varepsilon$. (En otras palabras, las aplicaciones f_1 y f_2 son *tangentes en* $\mathbf{u}$ si el cociente $\mu(r)/r$ tiende al límite 0 cuando r tiende a 0). En tal caso, suele decirse que $\mu(r) = \mathbf{o}(r)$.

Sean $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ como en el párrafo anterior. La aplicación $f{:}\mathcal{U} \to \mathcal{W}$ es *diferenciable* en $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ si f es continua (*véase* TOPOLOGÍA) y existe una aplicación lineal $g{:}\mathcal{V} \to \mathcal{W}$ tal que las aplicaciones $\mathbf{x} \mapsto (f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{u}))$ y $\mathbf{x} \mapsto g(\mathbf{x} - \mathbf{u})$ son tangentes en $\mathbf{u}$. Esta condición puede expresarse así:

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{u}) - g(\mathbf{x} - \mathbf{u})\| = \mathbf{o}(\|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|)$$

Si f es diferenciable en $\mathbf{u}$ la aplicación lineal g mencionada en la definición anterior es única y continua. Se llama la *derivada* de f *en* $\mathbf{u}$ y se designa $f'(\mathbf{u})$. f es *diferenciable* si es diferenciable en todo su dominio $\mathcal{U}$. En tal caso, la aplicación $f'{:}\mathcal{U} \to \mathcal{L}(\mathcal{V};\mathcal{W})$ por $\mathbf{u} \mapsto f'(\mathbf{u})$ es la *derivada* de f (donde $\mathcal{L}(\mathcal{V};\mathcal{W})$ designa el espacio de las aplicaciones lineales de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$, como se explica en VECTORES Y TENSORES). Como es posible definir en forma análoga la derivada f'' de f', etc. suele llamarse a f' la *derivada de primer orden*, a f'' la *derivada de segundo orden*, etc., de la aplicación f.

ECUACIÓN DIFERENCIAL. No puedo dar aquí una definición satisfactoria de este concepto. Me limitaré a caracterizar la forma más simple de ecuación diferencial y a sugerir varios modos de generalizarla.[2]

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Sea $f{:}\, U \to \mathbb{R}^n$ una aplicación continua que asigna al par $\langle t,\mathbf{r}\rangle$ ($t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$) el valor $f(t, \mathbf{r})$. La expresión siguiente constituye una *ecuación diferencial ordinaria de primer orden*:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = f(t,\mathbf{r}) \qquad \text{(VM.1)}$$

Una *solución exacta* de la ecuación (VM.1) es cualquier aplicación φ: $\mathbf{I} \to \mathbb{R}^n$ (donde $\mathbf{I}$ es un intervalo cualquiera

2. Las ecuaciones diferenciales son la espina dorsal de la física matemática y proveen la clave para entender la necesidad física. He intentado explicar cómo hacen este papel en Torretti 1990, pp. 266ss.

en $\mathbb{R}$) que cumple las tres condiciones siguientes:

(i) La primera derivada φ' está definida y es continua en el interior de $\mathbf{I}$.
(ii) Para cada $t \in \mathbf{I}$, $\langle t,\varphi(t)\rangle \in U$.
(iii) Para cada $t \in \mathbf{I}$, $\varphi'(t) = f(t,\varphi(t))$.

El concepto de ecuación diferencial ordinaria de primer orden puede generalizarse reemplazando en la definición precedente el cuerpo $\mathbb{R}$ de los reales por el cuerpo $\mathbb{C}$ de los complejos o estipulando que el dominio U de f en la ecuación (VM.1) sea un subconjunto of $\mathbb{R} \times \mathcal{V}$ o de $\mathbb{C} \times \mathcal{W}$, donde $\mathcal{V}$ es un espacio de Banach (*véase*) real y $\mathcal{W}$ un espacio de Banach complejo. Las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden n envuelven las derivadas de sus soluciones de orden igual o menor que n. Si $\mathcal{V}$ es un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathcal{V}^n$, y $f{:}U \to \mathcal{V}$ es una aplicación continua, una *ecuación diferencial ordinaria de orden n* se escribe así:

$$\mathrm{d}^n\mathbf{r}/\mathrm{d}t^n = f(t,\mathbf{r},\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t, \ldots ,\mathrm{d}^{n-1}\mathbf{r}/\mathrm{d}t^{n-1}) \qquad \text{(VM.2)}$$

con $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{r} \in \mathcal{V}$. Una solución es una aplicación $\varphi{:}\,\mathbf{I} \to \mathcal{V}$ (donde $\mathbf{I}$ es un intervalo en $\mathbb{R}$) que cumple las tres condiciones siguientes:

(i′) Todas las derivadas de orden igual o menor que n, $\varphi', \ldots, \varphi^{(n)}$, están definidas y son continuas en el interior de $\mathbf{I}$.
(ii′) Para cada $t \in \mathbf{I}$, $\langle t,\varphi(t),\varphi'(t), \ldots ,\varphi^{(n-1)}(t)\rangle \in U$.
(iii′) Para cada $t \in \mathbf{I}$, $\varphi^{(n)}(t) = f(t,\varphi(t),\varphi'(t), \ldots ,\varphi^{(n-1)}(t))$.

Buscar una solución de la ecuación (VM.2) equivale entonces a buscar una solución del siguiente sistema de n ecuaciones de primer orden:

$$\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t = \mathbf{r}_1, \qquad \mathrm{d}\mathbf{r}_1/\mathrm{d}t = \mathbf{r}_2, \ldots,$$

$$\mathrm{d}\mathbf{r}_{n-2}/\mathrm{d}t = \mathbf{r}_{n-1}, \qquad \mathrm{d}\mathbf{r}_{n-1}/\mathrm{d}t = f(t,\mathbf{r},\mathbf{r}_1, \ldots ,\mathbf{r}_{n-1})$$

En vez de buscar una sola función desconocida φ que satisfaga las condiciones (i′)–(iii′), se busca un sistema de n funciones desconocidas $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ que cumplen las condiciones (i) and (ii) y también la condición siguiente:

$$\text{(iii}''\text{)}\quad \varphi'(t) = \varphi_1(t), \quad \varphi'_1(t) = \varphi_2(t), \ldots, \quad \varphi'_{n-2}(t) = \varphi_{n-1}(t),$$
$$\varphi'_{n-1}(t) = f(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_{n-1}(t)).$$

Las ecuaciones diferenciales parciales tienen soluciones definidas en una región de $\mathbb{R}^m$ o de $\mathbb{C}^m$ (para algún entero $m > 1$) y envuelven sus derivadas parciales.

ESPACIO DE BANACH. Los espacios de Banach son espacios vectoriales a los que se puede extender de un modo natural el cálculo diferencial originalmente inventado para las funciones con argumentos y valores en $\mathbb{R}$. El concepto de espacio vectorial se define en el artículo VECTORES Y TENSORES.

Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial real o complejo (el cuerpo de escalares $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Una *norma* sobre $\mathcal{V}$ es una aplicación $\rho: \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ con las propiedades siguientes: Para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ y todo $a \in \mathbb{K}$,

(i)	$\rho(\mathbf{u}) = 0$ si y sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
(ii)	$\rho(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \geq \rho(\mathbf{u}) + \rho(\mathbf{v})$
(iii)	$\rho(a\mathbf{u}) = \lvert a \rvert \cdot \rho(\mathbf{u})$

El espacio vectorial $\mathcal{V}$ premunido de la norma ρ se dice *normalizado*. En vez de $\rho(\mathbf{u})$, escribimos $\lVert \mathbf{u} \rVert$. Considérese la función $\delta: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ definida por $\delta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lVert \mathbf{u} - \mathbf{v} \rVert$ (donde $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + -1(\mathbf{v})$, esto es, la suma del vector $\mathbf{u}$ con el producto del vector $\mathbf{v}$ por el escalar -1). Es fácil comprobar que δ es una métrica (*véase*) en el sentido corriente.

Considérese la secuencia infinita de vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots = (\mathbf{v}_n)_{n=1}^{\infty}$. Decimos que $(\mathbf{v}_n)_{n=1}^{\infty}$ es una *secuencia de Cauchy* si para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$ hay un entero N_ε tal que, para todo n, $m > N_\varepsilon$, $\lVert \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_m \rVert < \varepsilon$. Decimos que $(\mathbf{v}_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge* al vector $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ si, para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$ hay un entero N_ε tal que, para todo $n > N_\varepsilon$, $\|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}\| < \varepsilon$. El espacio vectorial normalizado $\mathcal{V}$ es un *espacio de Banach* si toda secuencia de Cauchy $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^{\infty}$ ($\mathbf{v}_i \in \mathcal{V}$) converge a algún vector en $\mathcal{V}$. Si $\mathcal{V}$ es un espacio de Banach entendemos que $\mathcal{V}$ está dotado de la topología (*véase*) inducida por la norma así: para cualquier $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ y $r \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{\mathbf{u}\colon \mathbf{u} \in \mathcal{V}$ y $\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| < r\}$ es un entorno abierto de $\mathbf{v}$.

Un espacio de Banach se dice *real* si el cuerpo de escalares es $\mathbb{R}$, *complejo* si el cuerpo de escalares es $\mathbb{C}$.

FUNCIÓN. *Véase* APLICACIÓN.

GRUPO DE TRANSFORMACIONES. Definiremos sucesivamente *grupo*, *transformación* y *grupo de transformaciones*.

Sea G un conjunto de objetos cualesquiera ($G \neq \varnothing$). Consideremos una aplicación $\oplus$ que asigna un elemento de G a cada par ordenado de elementos de G. Designaremos el valor de $\oplus$ en el par $\langle a,b \rangle$ con la expresión $a \oplus b$. El par $\langle G,\oplus \rangle$ es un *grupo* si se cumplen las tres condiciones siguientes, para cualesquiera elementos a, b y c del conjunto G:

G1 $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$ (la operación $\oplus$ es *asociativa*).
G2 Existe un $x \in G$ tal que $a \oplus x = b$.
G3 Existe un $y \in G$ tal que $y \oplus a = b$.

Se puede demostrar que estas tres condiciones implican que:

G4 Existe un $e \in G$ tal que, para todo $a \in G$, $e \oplus a = a \oplus e = a$ (e es el elemento *neutro* del grupo).
G5 Hay una aplicación $\psi\colon G \to G$, tal que para cada $a \in G$, $a \oplus \psi(a) = \psi(a) \oplus a = e$. $\psi(a)$ es el elemento *inverso* de a.

Por otra parte, las condiciones G2 y G3 se pueden deducir de G1, G4 y G5. Por eso, se puede —y se suele— definir un *grupo* como un cuádruplo $\langle G,e,\oplus,\psi\rangle$ que cumple las condiciones G1, G4 y G5. Para designar el inverso de un elemento a perteneciente a un grupo G se usan habitualmente las expresiones simbólicas a^{-1} o $-a$, en vez de $\psi(a)$.

El grupo $\langle G,\oplus\rangle$ es *abeliano* si la operación $\oplus$ es *conmutativa*, esto es, si $a \oplus b = b \oplus c$ para todo $a,b \in G$.

Sea S un conjunto de objetos cualesquiera. Una *transformación* o *permutación* de S es una aplicación biyectiva $f\colon S \to S$. (Habitualmente se dice 'transformación' si S es un "espacio" con alguna clase de continuidad, y 'permutación' si S es un conjunto discreto, como una lista de números).

Sea G el conjunto de las transformaciones de un conjunto S y sea $\circ$ la aplicación que le asigna a cada par $\langle g,h\rangle$ de elementos de G la aplicación compuesta $g \circ h$ (*véase* APLICACIONES Y CONJUNTOS). $\langle G,\circ\rangle$ es un grupo. En efecto, la composición de aplicaciones es evidentemente asociativa. Además, si tomamos como elemento neutro a la transformación idéntica $\boldsymbol{i}\colon S \to S$, definida por la condición $\boldsymbol{i}(x) = x$, es claro que $\langle G,\boldsymbol{i},\circ\rangle$ cumple las condiciones G4 y G5.

Supongamos ahora que la expresión $P(x_1, \ldots ,x_n)$ dice que los objetos $x_1, \ldots ,x_n$ satisfacen cierta condición P. Decimos que una transformación $f\colon S \to S$ *preserva* la condición P si, para todo n-tuplo $\langle a_1, \ldots ,a\rangle$ de elementos de S, tenemos que $P(a_1, \ldots a_n)$ implica que $P(f(a_1), \ldots ,f(a_n))$. Sea F el conjunto $\{g{:}g \in G$ y g preserva $P\}$. Es claro que $\boldsymbol{i} \in F$ y que, si g y $h \in F$, tanto la aplicación compuesta $g \circ h$ como la aplicación inversa h^{-1} pertenecen a F. Por lo tanto, F es un grupo.

Isomorfismo. Sea f una aplicación biyectiva de un conjunto $\mathscr{A}$ en un conjunto $\mathscr{B}$. Si $\mathscr{A}$ tiene una estructura —digamos, un orden parcial, o una estructura de cuerpo o de espacio topológico— f induce en $\mathscr{B}$ una estructura de la misma clase. Por ejemplo, si $\mathscr{A}$ contiene en virtud de su estructura un elemento distinguido e, $f(e)$ es un elemento distinguido de $\mathscr{B}$ en virtud de la estructura inducida por f; si la estructura de $\mathscr{A}$ está definida (en parte) por una relación diádica R, la estructura inducida estará definida (en parte) por una relación diádica $R^\star$ tal que $f(a)R^\star f(b)$ si y sólo si aRb; si la estructura de $\mathcal{A}$ incluye una aplicación $\varphi: \mathcal{A}^2 \to \mathcal{A}$ que asigna el objeto $z \in \mathcal{A}$ al par $\langle x,y \rangle \in \mathcal{A}^2$, la estructura inducida incluye una aplicación $\varphi^\star: \mathcal{B}^2 \to \mathcal{B}$ que asigna precisamente el objeto $f(z)$ al par $\langle f(x), f(y) \rangle$; si la estructura de $\mathcal{A}$ selecciona una clase $\mathcal{T}$ de subconjuntos de $\mathcal{A}$, la estructura inducida selecciona una clase $\mathcal{T}^\star$ de subconjuntos de $\mathcal{B}$ tal que $f(X) \in \mathcal{T}^\star$ si y sólo si $X \in \mathcal{T}$. Supongamos ahora que también $\mathcal{B}$ posee una estructura y que ésta coincide con la estructura inducida por f. Decimos entonces que la biyección f es un *isomorfismo.* En tal caso, obviamente, la biyección inversa f^{-1} también es un isomorfismo. Dos conjuntos estructurados $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son *isomórficos* si existe un isomorfismo entre ellos.

LINEAL (APLICACIÓN, FUNCIÓN). *Véase* VECTORES Y TENSORES.

MÉTRICA. Sea S un conjunto cualquiera. Corrientemente, una *métrica* en S es simplemente una función $\delta: S \times S \to \mathbb{R}$ con las propiedades siguientes: Si a, b y c son cualesquiera elementos de S (i) $\delta(a,b) \geq 0$; (ii) $\delta(a,b) = 0$ si y sólo si $a = b$; (iii) $\delta(a,b) + \delta(b,c) \leq \delta(a,c)$. Sin embargo, como se explicó en el Capítulo 2, en la teoría de las variedades riemannianas la palabra 'métrica' se usa de otro modo: con ella se designa el campo tensorial de rango 2 característico de una variedad de ese tipo. Sea V una variedad diferenciable con métrica riemanniana g. Si —como en todos los casos considerados antes de Minkowski— g es positivo-definida, g determina una métrica —en la acepción corriente— en el espacio tangente a V en cada punto $P \in V$ (*véase* VECTORES Y TENSORES, VARIEDAD DIFERENCIABLE). Pero la métrica riemanniana del espacio-tiempo de Minkowski o de un modelo cualquiera de la Relatividad General no tiene esta propiedad. Por eso, algunos prefieren hablar en estos casos de métricas *pseudo*-riemannianas o *semi*-riemannianas (aunque, claro está, quien tenga esos remilgos debería llamarlas *pseudométricas*).

MULTILINEAL. *Véase* VECTORES Y TENSORES.

PRODUCTO CARTESIANO. Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. El *producto cartesiano* $A \times B$ es el conjunto de todos los pares ordenados $\langle a,b\rangle$ que cumplen la condición: $a \in A$ y $b \in B$. Si C es un tercer conjunto, $A \times B \times C = A \times (B \times C)$. El producto cartesiano de n conjuntos se define en forma análoga. Como es obvio, también se puede formar el producto cartesiano de un conjunto consigo mismo: $A \times A = A^2 = \{\langle x,y\rangle\colon x,y \in A\}$. Repitiendo esta operación dos, tres, . . . , $n-1$ veces, se obtienen los productos cartesianos A^3, A^4, . . . , A^n.

TENSOR. *Véase* VECTORES Y TENSORES.

TOPOLOGÍA. El concepto de topología permite darle un sentido a la vez preciso y abstracto a las nociones intuitivas de continuidad y vecindad, inherentes a la idea de espacio. Ello permite extender estas nociones a un conjunto $\mathcal{S}$ de objetos cualesquiera, que por analogía con el espacio suelen llamarse ‘puntos’. Hay varios modos —lógicamente equivalentes— de definir una *topología* en $\mathcal{S}$. El que explico en seguida se basa en el concepto de vecindario o entorno.

Suponemos que cada punto $x \in \mathcal{S}$ está asociado a una colección $\mathcal{U}_x$ de *entornos de* x con las cinco propiedades siguientes:

T1 Si U es un entorno de x, $x \in U \subseteq \mathcal{S}$.
T2 $\mathcal{S}$ es un entorno de x.
T3 Si U es un entorno de x y $U \subseteq V$, V es un entorno de x.
T4 Si U y V son entornos de x, la intersección $U \cap V$ es un entorno de x.
T5 Si U es un entorno de x hay un conjunto de puntos V tal que $x \in V \subseteq U$ y V es un entorno de cada uno de sus puntos ($y \in V \Rightarrow V \in \mathcal{U}_y$).

Sea $\mathcal{U}$ la colección de todos los entornos de puntos de $\mathcal{S}$ ($\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_x : x \in \mathcal{S}\}$). Entonces, $\mathcal{U}$ es una *topología* (de entornos) en $\mathcal{S}$ y $\langle\mathcal{S},\mathcal{U}\rangle$ es un *espacio topológico.*

Los siguientes conceptos topológicos se utilizan en diversos pasajes de este libro:

(*a*) Un conjunto $A \subseteq \mathcal{S}$ es un *abierto* de la topología $\mathcal{U}$ si A es un entorno de cada uno de los puntos contenidos en A (según esto, T5 dice que todo entorno de un punto x incluye un entorno abierto de x).[3]

(*b*) Un conjunto $B \subseteq \mathcal{S}$ es un *cerrado* de la topología $\mathcal{U}$ si el complemento de B (es decir, el conjunto $\mathcal{S}\setminus B$) es abierto.

(*c*) La *frontera* de un conjunto $C \subseteq \mathcal{S}$ es el conjunto $F_C \subseteq \mathcal{S}$ caracterizado así: $x \in F_C$ si y sólo si cada entorno de x incluye puntos que pertenecen a C y puntos que no pertenecen a C. La unión de C y F_C se llama la *clausura* de C. (EJERCICIO: demostrar que la clausura de C es un conjunto cerrado).

(*d*) Si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{T}$ son dos topologías en $\mathcal{S}$, decimos que $\mathcal{U}$ es *más débil* o *más gruesa* que $\mathcal{T}$ (y $\mathcal{T}$ *más fuerte* o *más fina* que $\mathcal{U}$) si y sólo si, para cada $x \in \mathcal{S}$, $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{T}_x$.

(*e*) Si $\langle\mathcal{S},\mathcal{U}\rangle$ y $\langle\mathcal{R},\mathcal{T}\rangle$ son dos espacios topológicos, la aplicación $f:\mathcal{S} \to \mathcal{R}$ es *continua* si y sólo si cada abierto de la topología $\mathcal{T}$ es la imagen por f de un abierto de la topología $\mathcal{U}$. (EJERCICIO: sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{T}$ topologías en $\mathcal{S}$; sea

3. El concepto de topología suele definirse partiendo de la noción de abierto. Sea $\mathcal{S}$ un conjunto cualquiera y $\mathcal{A}$ un conjunto de subconjuntos de $\mathcal{S}$ que cumple las siguientes condiciones: $\mathrm{T_A}1$: $\mathcal{S} \in \mathcal{A}$; $\mathrm{T_A}2$: $\varnothing \in \mathcal{A}$; $\mathrm{T_A}3$: si $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{A}$, la intersección $A \cap B \in \mathcal{A}$; $\mathrm{T_A}4$: si $A_1, A_2, \ldots$ es una lista, posiblemente infinita, de elementos de $\mathcal{A}$, la unión $\bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$. Entonces $\langle\mathcal{S},\mathcal{A}\rangle$ es un espacio topológico. Es fácil comprobar que los abiertos de la topología $\mathcal{U}$ arriba definida cumplen estas cuatro condiciones. Por otro lado, dada la "topología de abiertos" $\mathcal{A}$, se le asigna a cada punto de $\mathcal{S}$ una familia de entornos que satisface las condiciones prescritas en la definición de la "topología de entornos" $\mathcal{U}$.

$\iota: \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ la aplicación que asigna a cada punto del espacio topológico $\langle \mathscr{S}, \mathscr{T} \rangle$ el mismo punto considerado como perteneciente al espacio topológico $\langle \mathscr{S}, \mathscr{U} \rangle$; use la nota 3 para probar que $\mathscr{T}$ es más fina que $\mathscr{U}$ si y sólo si ι es continua).

(*f*) Si la aplicación continua $f: \mathscr{S} \to \mathscr{R}$ es biyectiva y la aplicación inversa $f^{-1}: \mathscr{R} \to \mathscr{S}$ también es continua, f es un *homeomorfismo*. Es fácil ver que un homeomorfismo es un isomorfismo (*véase*) de espacios topológicos. $\langle \mathscr{S}, \mathscr{U} \rangle$ y $\langle \mathscr{R}, \mathscr{T} \rangle$ se dicen *homeomórficos* si hay un homeomorfismo entre ellos.

(*g*) Si $\langle \mathscr{S}, \mathscr{U} \rangle$ es un espacio topológico y $A \subseteq \mathscr{S}$, definimos así la topología natural o *topología de subespacio* en A: cada parte $B \subseteq A$ es un abierto de esta topología si y sólo si B es la intersección de A con un abierto de $\langle \mathscr{S}, \mathscr{U} \rangle$. Con esta topología, A constituye un *subespacio* de $\langle \mathscr{S}, \mathscr{U} \rangle$.

Si $\mathbb{R}$ es el cuerpo de los reales y n es un entero positivo, la *topología estándar* en el producto cartesiano $\mathbb{R}^n$ se define así: dado cualquier par de números reales a y b, el *cubo abierto* $(a,b)^n$ es el conjunto de n-tuplos $\{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle : a < x_1, \ldots, x_n < b\}$. La topología estándar en $\mathbb{R}^n$ es la topología más gruesa en que todos los cubos abiertos son abiertos.

VARIEDAD DIFERENCIABLE. Como se explica en los Capítulos 2 y 7, el concepto de variedad diferenciable es el principal concepto matemático de la Teoría General de la Relatividad y la cosmología relativista. En dichos capítulos se lo caracterizó de un modo más o menos intuitivo. El lector que desee una definición más precisa, puede suplementar esas caracterizaciones con lo dicho aquí. Utilizaré libremente la información suministrada en el resto de este vocabulario, inclusive el artículo siguiente, VECTORES Y TENSORES.

Llamamos *variedad topológica n-dimensional* a un espacio topológico que equivale *localmente* al espacio topológico $\mathbb{R}^n$ (para algún entero positivo n), es decir, un espacio $\mathscr{M}$ tal que cada punto de $\mathscr{M}$ tiene un entorno homeomórfico a $\mathbb{R}^n$ (*véase* TOPOLOGÍA). Una *carta* de $\mathscr{M}$ es un homeomorfismo que aplica un abierto de $\mathcal{M}$ sobre un abierto de $\mathbb{R}^n$. Obsérvese que, si g y h son dos cartas de $\mathcal{M}$, cuyos dominios son U_g y U_h, respectivamente, la transformación de cartas (o *transformación de coordenadas*) $g \circ h^{-1}$ es, por definición, un homeomorfismo $h(U_g \cap U_h) \to g(U_g \cap U_h)$, entre dos abiertos de $\mathbb{R}^n$ (*véase la* fig. 5). Decimos que las cartas g y h son *compatibles* si las transformaciones $g \circ h^{-1}$ y $h \circ g^{-1}$ tienen derivadas continuas de todo orden en todos los puntos en que estén definidas (*véase* DIFERENCIABLE).[4] Un *atlas* de $\mathcal{M}$ es una colección de cartas que cubre a $\mathcal{M}$, de modo que cada punto de $\mathcal{M}$ está contenido en el dominio de (al menos) una carta del atlas. Diremos que un atlas de $\mathcal{M}$ es *diferenciable* si todas las cartas que contiene son compatibles entre sí. Sea $\mathcal{A}$ un atlas diferenciable de $\mathcal{M}$. La colección de todas las cartas de $\mathcal{M}$ compatibles con cualquier carta del atlas $\mathcal{A}$ constituye el *atlas máximo* determinado por $\mathcal{A}$, que designamos $\mathcal{A}_{\max}$. Es fácil probar que todas las cartas de $\mathcal{A}_{\max}$ son compatibles entre sí. La estructura $\langle \mathcal{M}, \mathcal{A}_{\max} \rangle$ es una *variedad diferenciable n-dimensional*.[5] Obsérvese que $\mathbb{R}^n$ y cualquier cubo abierto en $\mathbb{R}^n$ tienen la estructura de variedades diferenciables n-dimensionales con el atlas máximo determinado por el atlas cuya única carta es la aplicación idéntica $x \mapsto x$. Si no hay peligro de confusión, una variedad diferenciable $\langle \mathcal{M}, \mathcal{A}_{\max} \rangle$ suele designarse con el nombre del espacio topológico subyacente $\mathcal{M}$, sin mencionar su atlas característico. Sigo siempre esta práctica en el cuerpo del libro.

La definición precedente de variedad diferenciable se basa en el concepto de variedad topológica, definido primero.

4. En la jerga del Capítulo 2, nota 6, lo que arriba llamé *compatible* se llamaría *compatible de la clase* C^∞ o C^∞*-compatible*. Utilizando los conceptos explicados allí podríamos distinguir atlases —y variedades diferenciables— de todas las clases C^k, con $k \geq 1$.

5. Estrictamente hablando, $\langle \mathcal{M}, \mathcal{A}_{\max} \rangle$ es lo que se llama un variedad diferenciable n-dimensional *real*, porque las cartas de $\mathcal{A}_{\max}$ tienen valores en $\mathbb{R}^n$. Si tomaran sus valores en $\mathbb{C}^n$, diríamos que $\langle \mathcal{M}, \mathcal{A}_{\max} \rangle$ es una variedad diferenciable n-dimensional *compleja*.

Pero también puede darse una definición directa. Sea $\mathcal{M}$ un conjunto de objetos cualesquiera. Sea $\mathcal{A}$ una colección de aplicaciones biyectivas, llamadas *cartas*, cada una de las cuales está definida en una parte de $\mathcal{M}$ y tiene como codominio un abierto en $\mathbb{R}^n$. Postulamos que (i) cada elemento de $\mathcal{M}$ pertenece al dominio de alguna carta; (ii) todas las cartas de $\mathcal{A}$ son compatibles entre sí (en el sentido explicado arriba). Puede demostrarse entonces que hay una colección única $\mathcal{A}_{\max}$ de cartas compatibles con cada una de las cartas de $\mathcal{A}$. Postulamos que $\mathcal{M}$ tiene la topología más gruesa en la cual cada carta de $\mathcal{A}_{\max}$ es una aplicación continua. Es claro que $\mathcal{M}$, con esta topología, es una variedad topológica n-dimensional y que $\langle \mathcal{M}, \mathcal{A}_{\max} \rangle$ es una *variedad diferenciable n-dimensional*.

Si $\mathcal{M}$ es una variedad diferenciable m-dimensional y $\mathcal{N}$ es una variedad diferenciable n-dimensional, decimos que una aplicación $f: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ es *diferenciable* en el punto $P \in \mathcal{M}$ si hay una carta g de $\mathcal{M}$ cuyo dominio contiene a P y una carta h de $\mathcal{N}$ cuyo dominio contiene a $f(P)$, tales que la aplicación compuesta $h \circ f \circ g^{-1}$ tiene derivadas continuas de todo orden en P. (Esta definición tiene sentido, puesto que el dominio de $h \circ f \circ g^{-1}$ es un abierto en $\mathbb{R}^m$ y su alcance es un abierto en $\mathbb{R}^n$). f es *diferenciable* o *lisa* si es diferenciable en todos los puntos de $\mathcal{M}$.

Si $\mathcal{M}$ es una variedad diferenciable, una *curva* en $\mathcal{M}$ es una aplicación lisa $\gamma: \mathbf{I} \to \mathcal{M}$, donde $\mathbf{I} \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto. La imagen de γ en $\mathcal{M}$ constituye un *camino* en $\mathcal{M}$ (y puede ser, como es obvio, también la imagen de otras curvas). Utilizaremos esta noción de curva para definir uno de los conceptos más importantes de la teoría de las variedades diferenciables: el *espacio tangente* a la variedad $\mathcal{M}$ en un punto $P \in \mathcal{M}$.

Consideremos el conjunto $\mathcal{F}(P)$ de todas las funciones lisas con valores reales definidas en algún entorno de P. Las dos estipulaciones siguientes bastan para darle a $\mathcal{F}(P)$ una estructura natural de espacio vectorial real: (i) la suma $g+h$ de dos funciones $g,h \in \mathcal{F}(P)$ es la función cuyo valor en cada punto X en que g y h están definidas es igual a $g(X) + h(X)$; (ii) el producto ag de la función $g \in \mathcal{F}(P)$ por un escalar $a \in \mathbb{R}$ es la función cuyo valor en cada punto X del dominio de g es igual a $ag(X)$. No es difícil probar que ag y $g+h$ pertenecen a $\mathcal{F}(P)$. Si $\gamma: \mathbf{I} \to \mathcal{M}$ es una curva cuyo camino pasa por P hay un $u \in \mathbf{I}$ tal que $\gamma(u) = P$. Si $f \in \mathcal{F}(P)$, la aplicación compuesta $f \circ \gamma$ es una función diferenciable $\mathbf{I} \to \mathbb{R}$ que tiene en $u \in \mathbf{I}$ la derivada $(f \circ \gamma)'(u)$ (*véase* DIFERENCIABLE). Como sabemos, $(f \circ \gamma)'(u)$ pertenece al espacio $\mathcal{L}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ de las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ (como se explica en la p. 260, $\mathbb{R}$ puede concebirse como un espacio vectorial sobre sí mismo). La *tangente* a la curva γ en el punto P es la función lineal [illegible] que asigna a cada $f \in \mathcal{F}(P)$ la respectiva derivada $(f \circ \gamma)'(u)$. Obviamente, [illegible] pertenece al espacio $\mathcal{L}(\mathcal{F}(P);\mathcal{L}(\mathbb{R};\mathbb{R}))$. Como $\mathcal{L}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ se identifica de un modo natural con $\mathbb{R}$,[6] podemos concebir a [illegible] como un vector del espacio $\mathcal{L}(\mathcal{F}(P);\mathbb{R})$ de las funciones lineales definidas en $\mathcal{F}(P)$. Se puede demostrar que el conjunto de todas las tangentes en P a curvas cuyos caminos pasan por P es en efecto un subespacio vectorial n-dimensional de $\mathcal{L}(\mathcal{F}(P);\mathbb{R})$. Este subespacio es el *espacio tangente* a $\mathcal{M}$ en P, que llamaremos $T_P\mathcal{M}$.

Consideremos ahora el conjunto $T\mathcal{M}$ de todos los espacios tangentes a $\mathcal{M}$. Es fácil darle una estructura de variedad diferenciable con el doble de dimensiones que $\mathcal{M}$. En efecto, si $\mathcal{M}$ es n-dimensional, entonces, para cada $P \in \mathcal{M}$, $T_P\mathcal{M}$ es un espacio vectorial real n-dimensional, de modo que $T_P\mathcal{M}$ y $\mathbb{R}^n$ son isomorfos. Sea $\nu_P: T_P\mathcal{M} \to \mathbb{R}^n$ un isomorfismo

6. En efecto, si $a \in \mathbb{R}$, la función que asigna a cada $x \in \mathbb{R}$ el valor ax pertenece al espacio $\mathcal{L}(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Por otra parte, cualquier $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ está determinada completamente por el número real $f(1)$ —puesto que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x{\cdot}1) = xf(1)$— y puede identificarse con este número. Cf. la definición de aplicación lineal en la p. 260.

(elegido arbitrariamente, pero fijo para cada $P \in \mathcal{M}$). Sea φ una carta de $\mathcal{M}$ con dominio U_φ. Llamemos TU_φ a la unión de los espacios tangentes a $\mathcal{M}$ en los diversos puntos de U_φ. Cada vector **v** tangente a $\mathcal{M}$ en un punto $Q \in U_\varphi$ queda identificado inequívocamente mediante una lista de $2n$ números reales, a saber, $\langle \varphi(Q), \nu_Q(\mathbf{w})\rangle$. La correspondencia que asigna a cada elemento de TU_φ la lista de números determinada según esta regla es una biyección de TU_φ en un abierto de $\mathbb{R}^{2n}$. Si dejamos que φ recorra el atlas máximo de $\mathcal{M}$, obtenemos una colección de tales biyecciones que evidentemente constituye un atlas de $T\mathcal{M}$. Dicho atlas determina un único atlas máximo. $T\mathcal{M}$, premunido de ese atlas máximo, es una variedad diferenciable $2n$-dimensional. Sea $\pi{:}T\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ la aplicación que asigna a cada vector tangente a $\mathcal{M}$ el punto en el cual es tangente. Es fácil ver que π es una aplicación diferenciable de una variedad diferenciable en otra. La estructura $\langle T\mathcal{M}, \mathcal{M}, \pi\rangle$ se llama el *fibrado tangente* sobre $\mathcal{M}$. En aras de la brevedad, lo llamaré $T\mathcal{M}$. Si $P \in \mathcal{M}$, la *fibra* sobre P es el conjunto $\pi^{-1}(P)$ (o sea, en este caso, el espacio tangente en P). Una *sección* del fibrado $T\mathcal{M}$ es una aplicación diferenciable $f{:}\mathcal{M} \to T\mathcal{M}$ tal que para cada $P \in \mathcal{M}$, $f(P)$ pertenece a la fibra sobre P. Un campo vectorial sobre la variedad diferenciable $\mathcal{M}$ es precisamente una sección del fibrado tangente $T\mathcal{M}$.

Al final del artículo VECTORES Y TENSORES se explica como cada espacio vectorial $\mathcal{V}$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ está asociado a una multitud de otros espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo, a saber, el espacio dual $\mathcal{V}^\star$ y los múltiples espacios de tensores en $\mathcal{V}$. Esto se aplica, como es natural, a cada espacio tangente a la variedad $\mathcal{M}$. En vez de nombrar a estos objetos por el espacio tangente al que están asociados, se los nombra por el punto de $\mathcal{M}$ en el cual ese espacio es tangente. Por ejemplo, un tensor covariante de rango 2 en $P \in \mathcal{M}$ es una función bilineal $T_P\mathcal{M} \times T_P\mathcal{M} \to \mathbb{R}$. Si dejamos que P recorra todo $\mathcal{M}$, obtenemos un conjunto de tales funciones bilineales que se deja estructurar como fibrado sobre $\mathcal{M}$. Un campo tensorial covariante de rango

2 en $\mathscr{M}$ es precisamente una sección de este fibrado. El lector podrá fácilmente imaginarse como se extiende esta terminología a otros casos.

VECTORES Y TENSORES. En el Capítulo 9 se dio una caracterización intuitiva del concepto de espacio vectorial que me parece suficiente para los efectos de este libro. Pero daré aquí una definición exacta. Le siguen definiciones de 'aplicación lineal', 'aplicación multilineal', 'tensor' y 'campo tensorial'.

Un *espacio vectorial* es un grupo abeliano (*véase* GRUPO) asociado a un cuerpo (*véase*). Sea, pues, $\mathscr{V} = \langle V,\mathbf{0},\mathbf{+}\rangle$ un grupo abeliano y $\mathbb{K} = \langle K,0,1,+,\cdot\rangle$ un cuerpo (obsérvese la representación tipográfica que he elegido para los elementos neutros y las operaciones de grupo). Los elementos de V se llaman *vectores*, los elementos de K, *escalares*. Los vectores se *suman* entre sí mediante la operación de grupo $\mathbf{+}$ y se *multiplican* por escalares. La multiplicación por escalares es una aplicación de $K \times V$ en V. El producto de la multiplicación de un vector $\mathbf{v}$ por un escalar a es, pues, un vector, que designamos $a\mathbf{v}$. Las aplicaciones $\mathbf{+}$, $+$ y $\cdot$ obedecen a las reglas habituales para operaciones del tipo respectivo. La multiplicación de vectores por escalares obedece a las reglas siguientes, para cualesquiera vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ y cualesquiera escalares a y b:

V1 $\quad a(\mathbf{v} \mathbf{+} \mathbf{w}) = a\mathbf{v} \mathbf{+} a\mathbf{w}$

V2 $\quad (a+b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} \mathbf{+} b\mathbf{v}$

V3 $\quad a(b\mathbf{v}) = (a\cdot b)\mathbf{v}$

V4 $\quad 1\mathbf{v} = \mathbf{v}$

Si se cumplen todas estas condiciones, decimos que $\mathscr{V}$ es un *espacio vectorial sobre el cuerpo* $\mathbb{K}$. Evidentemente, cualquier vector puede ser igual a una suma de múltiplos de otros vectores; por ejemplo, $\mathbf{v} = a\mathbf{x} \mathbf{+} b\mathbf{y} \mathbf{+} c\mathbf{z}$. En tal caso decimos que $\mathbf{v}$ es una *combinación lineal* de $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$. Un conjunto B de vectores —diferentes de $\mathbf{0}$— constituye una *base* del espacio vectorial si (i) ningún vector de B es una combinación lineal de los restantes vectores de B y (ii) todos los vectores del espacio son combinaciones lineales de vectores de B. Decimos que $\mathcal{V}$ es un espacio vectorial n-dimensional si tiene una base formada por n vectores. En tal caso, se puede demostrar que cualquier otra base de $\mathcal{V}$ consta también de n vectores.

Si $\mathcal{V}$ es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ también llamamos $\mathcal{V}$ al conjunto de los vectores (arriba denominado V) y $\mathbb{K}$ al conjunto de los escalares (arriba denominado K). Esta metonimia se ajusta a la práctica habitual de los matemáticos y normalmente es inofensiva.

Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo cualquiera, le damos a $\mathbb{K}^n$ (el conjunto de todos los n-tuplos de elementos de $\mathbb{K}$) la estructura de un espacio vectorial n-dimensional sobre $\mathbb{K}$ mediante las siguientes estipulaciones:

SUMA DE VECTORES:

$$\langle a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_n\rangle + \langle b_1,\ldots,b_i,\ldots,b_n\rangle = \langle a_1+b_1,\ldots,a_i+b_i,\ldots,a_n+b_n\rangle.$$

MULTIPLICACIÓN POR ESCALARES:

$$a\langle b_1,\ldots,b_i,\ldots,b_n\rangle = \langle a\cdot b_1,\ldots,a\cdot b_i,\ldots,a\cdot b_n\rangle$$

Bajo estas reglas, el propio cuerpo $\mathbb{K}$ se puede ver como un espacio vectorial unidimensional sobre sí mismo.

Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, el cuerpo de los reales, se dice que $\mathcal{V}$ es un espacio vectorial *real*. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, el cuerpo de los complejos, se dice que $\mathcal{V}$ es un espacio vectorial *complejo*. Salvo en el caso de la Mecánica Cuántica, a que se refiere la nota 5 del Capítulo 9, todos los espacios vectoriales mencionados en este libro son *reales*.

Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Una aplicación $f{:}\mathcal{V} \to \mathcal{W}$ es *lineal* si, para todo $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ y todo $a,b \in \mathbb{K}$, $f(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = af(\mathbf{u}) + bf(\mathbf{v})$. Adviértase que en esta ecuación el símbolo $+$ representa la suma de vectores en $\mathcal{V}$ al lado izquierdo y la suma de vectores en $\mathcal{W}$ al lado derecho; la ambigüedad podría eliminarse mediante el uso de sufijos. (En particular, si $\mathcal{W}$ es $\mathbb{K}$, visto como un espacio vectorial unidimensional sobre sí mismo, decimos que f es una *función lineal* sobre $\mathcal{V}$).

Sea $\mathcal{L}(\mathcal{V};\mathcal{W})$ el conjunto de todas las aplicaciones lineales de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$. La *suma* de dos aplicaciones $f, g \in \mathcal{L}(\mathcal{V};\mathcal{W})$ es la aplicación $(f+g)$ definida por: $(f+g)(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. El *producto* de $f \in \mathcal{L}(\mathcal{V};\mathcal{W})$ por el escalar a es la aplicación (af) definida por: $(af)(\mathbf{v}) = af(\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Sea $\mathbf{0}$ la aplicación que asigna a todo $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ el vector cero en $\mathcal{W}$. Es claro que $(f+g)$, (af) y $\mathbf{0}$ son aplicaciones lineales. Por lo tanto $\langle \mathcal{L}(\mathcal{V};\mathcal{W}), \mathbf{0}, + \rangle$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Si $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ son ambos n-dimensionales, y $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ es una base de $\mathcal{V}$ y $\langle w_1, \dots, w_n \rangle$ es una base de $\mathcal{W}$, hay una única aplicación $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ tal que $v_i \mapsto w_i$ $(1 \leq i \leq n)$; f es biyectiva y lineal (*demuéstrelo*) y constituye por lo tanto un isomorfismo de espacios vectoriales. Por lo tanto, todos los espacios vectoriales n-dimensionales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ son isomórficos.

Consideremos el conjunto $\mathcal{L}(\mathcal{V};\mathbb{K})$ de todas las funciones lineales sobre $\mathcal{V}$, premunido de la estructura de espacio vectorial como acabo de explicar. Se lo llama el *espacio dual* de $\mathcal{V}$ y se lo designa con $\mathcal{V}^\star$. En particular, si $\mathcal{V}$ es n-dimensional, también $\mathcal{V}^\star$ es n-dimensional, como paso a demostrar. En ese caso, cualquier función lineal g sobre $\mathcal{V}$ está completamente determinada por sus valores sobre los n vectores que componen una base de $\mathcal{V}$: si $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \rangle$ es una base de $\mathcal{V}$, $\mathbf{a} = a_1\mathbf{u}_1 + \dots + a_n\mathbf{u}_n$ es un vector cualquiera, y $g(\mathbf{u}_i) = g_i$, es claro que $g(\mathbf{a}) = a_1 g(\mathbf{u}_1) + \dots + a_n g(\mathbf{u}_n) = \sum_i a_i g_i$. Sea $\langle f_1, \dots, f_n \rangle$ el n-tuplo de funciones lineales sobre $\mathcal{V}$ definidas por $f_j(\mathbf{u}_k) = \delta_{jk}$ (donde $1 \leq j,k \leq n$, $\delta_{kk} = 1$ y $\delta_{jk} = 0$ si $j \neq k$). Entonces $\langle f_1, \dots, f_n \rangle$ es una base de $\mathcal{V}^\star$. En efecto, nuestra función g es igual a $g_1 f_1 + \dots + g_n f_n$.

Más aún, si $\mathcal{V}$ es n-dimensional, es posible identificarlo con $\mathcal{V}^{\star\star}$, el espacio vectorial formado por las funciones lineales sobre $\mathcal{V}^\star$. Para que esto se vea con más claridad, en vez de $f(\mathbf{v})$ escribiré $\langle f,\mathbf{v}\rangle$ para referirme al valor de la función lineal f en el vector $\mathbf{v}$. Fijemos $\mathbf{v}$ mientras f recorre todo el conjunto $\mathcal{V}^\star$. Entonces $\mathbf{v}$ puede verse como una función que asigna a cada $f \in \mathcal{V}^\star$ un valor $\langle f,\mathbf{v}\rangle \in \mathbb{K}$. Esta función es lineal, puesto que, conforme a las definiciones de $(f+g)$ y (af), $\langle (f+g),\mathbf{v}\rangle = \langle f,\mathbf{v}\rangle + \langle g,\mathbf{v}\rangle$ y $\langle (af),\mathbf{v}\rangle = a\langle f,\mathbf{v}\rangle$. Visto de este modo, $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}^{\star\star}$. Pero $\mathcal{V}^{\star\star}$ es el espacio dual del espacio n-dimensional $\mathcal{V}^\star$ y, por lo tanto, también es n-dimensional. En consecuencia, ninguna base de $\mathcal{V}^{\star\star}$ puede tener más de n vectores. Esto implica que cualquier vector de $\mathcal{V}^{\star\star}$ es una combinación lineal de los n vectores de una base de $\mathcal{V}$.[7] Por lo tanto, $\mathcal{V}^{\star\star} \subseteq \mathcal{V}$.

Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Consideremos una función $f: \mathcal{U} \times \mathcal{V} \to \mathbb{K}$. f asigna un valor en $\mathbb{K}$ a cada par de vectores $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$ con $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ y $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Si fijamos $\mathbf{v}$ mientras $\mathbf{u}$ recorre $\mathcal{U}$, obtenemos una función $f_{\mathbf{v}}: \mathcal{U} \to \mathbb{K}$. Si, para cada $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, la función $f_{\mathbf{v}}$ así definida es lineal, decimos que f es 'lineal en el primer argumento'. El concepto de 'función lineal en el segundo argumento' se define en forma análoga. La función f es *bilineal* si es lineal en ambos argumentos. En otras palabras, $f: \mathcal{U} \times \mathcal{V} \to \mathbb{K}$ es bilineal si y sólo si, para cualesquiera vectores $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2 \in \mathcal{U}$, $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2 \in \mathcal{V}$ y cualesquiera escalares $a,b \in \mathbb{K}$, se cumplen las dos condiciones siguientes.

$$f(a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2,\mathbf{v}_1) = af(\mathbf{u}_1,\mathbf{v}_1) + bf(\mathbf{u}_2,\mathbf{v}_1)$$
$$f(\mathbf{u}_1,a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2) = af(\mathbf{u}_1,\mathbf{v}_1) + bf(\mathbf{u}_1,\mathbf{v}_2)$$

Del mismo modo, si $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_n$ son n espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, la función $f: \mathcal{V}_1 \times \dots \times \mathcal{V}_n \to \mathbb{K}$ es n-lineal si es 'lineal en cada argumento'. (EJERCICIO: formular con precisión este concepto). Si $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2 = \dots = \mathcal{V}_n = \mathcal{V}$ escribimos $\mathcal{V}^n$ en vez de $\mathcal{V}_1 \times \dots \times \mathcal{V}_n$.

7. Supongamos que no es así. Sea B una base de $\mathcal{V}$ y $\mathbf{u}$ un vector de $\mathcal{V}^{\star\star}$ que no es una combinación lineal de vectores de B. Entonces, contra lo demostrado arriba, hay una base de $\mathcal{V}^{\star\star}$ con más de n elementos, a la que pertenecen $\mathbf{u}$ y todos los vectores de B.

Un *tensor covariante* de rango n en $\mathcal{V}$ es una función n-lineal $f:\mathcal{V}^n \to \mathbb{K}$. Un *tensor contravariante* de rango n en $\mathcal{V}$ es una función n-lineal $f:(\mathcal{V}^\star)^n \to \mathbb{K}$. Un *tensor mixto* de rango n en $\mathcal{V}$ es una función n-lineal con valores en $\mathbb{K}$ definida en el producto cartesiano de n copias de $\mathcal{V}$ o su dual $\mathcal{V}^\star$. Por ejemplo, una función 5-lineal $f:\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V}^\star \times \mathcal{V}^\star \times \mathcal{V} \to \mathbb{K}$ es un tensor mixto de rango 5, covariante en el primer, segundo y quinto índice y contravariante en los índices tercero y cuarto.

(La definición de *tensor* ofrecida aquí no es la única posible, pero me parece la más fácil de explicar y de entender. Conviene advertir, sí, que en la literatura física se suele llamar 'tensor' —por ejemplo, 'tensor de tensión y energía'— a lo que es en rigor un *campo* de tensores, esto es, una correspondencia que asigna a cada punto de una variedad diferenciable un tensor en el espacio tangente a la variedad en ese punto. *Véase* VARIEDAD DIFERENCIABLE).

Bibliografía

Agazzi, E. y A. Cordero, eds. (1991). *Philosophy and the Origin and Evolution of the Universe.* Dordrecht: Kluwer.

Anderson, J. L. (1964). "Relativity principles and the role of coordinates in physics". En Chiu y Hoffmann 1964, pp. 175-194.

Anderson, J. L. (1967). *Principles of Relativity Physics.* New York: Academic Press.

Aristoteles. *Opera.* Ex recognitione I. Bekkeri edidit Academia Regia Borussica. Berlin: G. Reimer, 1831. 2 vols.

Arzeliès, H. (1961). *Rélativité généralisée: Gravitation.* Paris: Gauthier-Villars.

Balzer, W., C. U. Moulines y J. D. Sneed (1987). *An Architectonic for Science: The Structuralist Program.* Dordrecht: D. Reidel.

Balzer, W., C. U. Moulines y J. D. Sneed (1986). "The structure of empirical science: local and global". En R. Barcan Marcus et al., eds. *Logic, Methodology and Philosophy of Science VII.* Amsterdam: North-Holland. Pp. 291–306.

Barrow, J. D. y F. J. Tipler (1986). *The Anthropic Cosmological Principle.* Oxford: Clarendon Press.

Berkeley, G. (1710). *A Treatise concerning the Principles of Human Knowledge.* Dublin.

Berkeley, G. (1721). *De motu.* Londoni: J. Tonson.

Birkhoff, G. D. (1923). *Relativity and Modern Physics.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Böhme, G., ed. (1976). *Protophysik: Für und wider eine konstruktive Wissenschaftstheorie der Physik.* Frankfurt a. M.: Suhrkamp.

Bohr, N. (1913). "On the constitution of atoms and molecules". *Philosophical Magazine.* **26**: 1-25, 476-502, 857-875.

Bohr, N. (1958). "Quantum physics and philosophy: Causality and complementarity". En *The Philosophical Writings of Niels Bohr.* Woodbridge: Ox Bow Press, 1987. Vol. III, Pp. 1-7. (Publicado originalmente en R. Klibansky, ed. *Philosophy in the Mid-Century,* Florence: La Nuova Italia Editrice, 1958).

Bondi, H. (1961). *Cosmology.* Second Edition. Cambridge: Cambridge University Press.

Bondi, H. y T. Gold (1948). "The steady-state theory of the expanding universe". *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.* **108**: 252-270.

Born, M. (1943). *Experiment and Theory in Physics.* Cambridge: Cambridge University Press.

Born, M. y P. Jordan (1925). "Zur Quantenmechanik". *Zeitschrift für Physik.* **24**: 858-888.

Braginsky, V. B. y A. B. Manukin (1977). *Measurement of Weak Forces in Physics Experiments.* Edited by D. H. Douglas. Chicago: University of Chicago Press. (El original ruso apareció en Moscú en 1974).

Braginsky, V. B. y V. I. Panov (1972). "Verification of the equivalence of inertial and gravitational mass". *Soviet Physics JETP.* **44**: 463-466. (Traducción inglesa; el original ruso apareció en *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **71**: 873-879 (1971)).

Brans, C. y R. H. Dicke (1961). "Mach's Principle and a relativistic theory of gravitation". *Physical Review.* **124**: 925-935.

Bub, J. (1989). "From micro to macro: A solution of the measurement problem of Quantum Mechanics". En A. Fine y J. Leplin, eds. *PSA 1988: Proceedings of the 1988 Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*. East Lansing, MI: Philosophy of Science Association. Vol. II, pp. 134-144.

Bunge, M. (1962). "Cosmology and magic". *The Monist.* **44**: 116.

Bunge, M. (1967). *Foundations of Physics.* Springer: Berlin.

Cartan, É. (1923/24/25). "Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée". *Annales de l'École Normale Supérieure.* **40**: 325-412; **41**: 1-25; **42**: 17-88.

Carter, B. (1973). "Large number coincidences and the Anthropic Principle in cosmology". En M. S. Longair, ed. *Confrontations of Cosmological Theories with Observational Data*. Dordrecht: D. Reidel. Pp. 291-298.

Chiu, H. y W. F. Hoffmann, eds. (1964). *Gravitation and Relativity.* New York: Benjamin.

Clemence, G. M. (1947). "The relativity effect in planetary motions". *Reviews of Modern Physics.* **19**: 361-364.

Collins, C. B. y S. W. Hawking (1973). "Why is the universe isotropic?". *Astrophysical Journal.* **180**: 317-334.

Debye, P. (1912). "Zur Theorie der spezifischen Wärme". *Annalen der Physik.* (4) **39**: 789-839.

Descartes, R. (AT). *Œuvres.* Editées par C. Adam y P. Tannery. Paris: Cerf, 1897-1912. 12 vols.

Dicke, R. H. (1961). "Dirac's cosmology and Mach's Principle". *Nature.* **192**: 440-441.

Dicke, R. H. (1964). "Experimental relativity". En C. DeWitt y B. DeWitt, eds. *Relativity, Groups and Topology*. New York: Gordon & Breach. Pp. 165-313.

Dicke, R. H. (1964a). "The many faces of Mach". En Chiu y Hoffmann 1964, pp. 121-141.

Diels, H. y W. Kranz (DK). *Die Fragmente der Vorsokratiker.* Siebente Auflage. Berlin: Weidmannsche Verlagsbuchhandlung. 3 vols.

Dirac, P. A. M. (1926). "The fundamental equations of quantum mechanics". *Royal Society of London Proceedings.* **A 109**: 642-653.

Droste, J. (1916). "The field of a single centre in Einstein's theory of gravitation, and the motion of a particle in that field". *K. Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Proceedings.* **19**: 197-215.

Ducasse, C. J. (1926). "On the nature and the observability of the causal relation". En Ducasse. *Truth, Knowledge and Causation*. London: Routledge & Kegan Paul, 1968. Pp. 1-14. (Publicado originalmente en *The Journal of Philosophy*, **23**).

Earman, J. (1972). "Notes on the causal theory of time". *Synthese.* **24**: 74-86.

Earman, J. (1993). *Bangs, Crunches, Whimpers, and Shrieks: Singularities and Acausality in Relativistic Spacetimes.* Manuscrito inédito.

Earman, J. y M. Friedman (1973). "The meaning and status of Newton's Law of Inertia and the nature of gravitational forces". *Philosophy of Science.* **40**: 329-359.

Earman, J. y J. Norton (1987). "What price spacetime substantivalism? The hole story". *British Journal for the Philosophy of Science.* **38**: 515-525.

Eddington, A. S. (1924). *The Mathematical Theory of Relativity.* Second Edition. Cambridge: Cambridge University Press.

Ehlers, J., F. A. E. Pirani y A. Schild (1972). "The geometry of free fall and light propagation". En L. O'Raifeartaigh, ed. *General Relativity*. Oxford: Clarendon Press. Pp. 63-94.

Einstein, A. (1905). "Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunk". *Annalen der Physik.* (4) **17**: 132-148.

Einstein, A. (1905a). "Zur Elektrodynamik bewegter Körper". *Annalen der Physik.* (4) **17**: 891–921.

Einstein, A. (1907). "Über die Relativitätstheorie und die aus demselben gezogenen Folgerungen". *Jahrbuch für Radioaktivität und Elektronik.* **4**: 411-462.

Einstein, A. (1907a). "Die Plancksche Theorie der Strahlung und die Theorie der spezifischen Wärme". *Annalen der Physik.* (4) **22**: 180-190.

Einstein, A. (1911). "Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes". *Annalen der Physik.* (4) **35**: 898-909.

Einstein, A. (1913). "Zum gegenwärtigen Stande des Gravitationsproblems". *Physikalische Zeitschrift.* **14**: 1249-1266.

Einstein, A. (1914). "Formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie". *K. Preußische Akademie der Wissenschaften, math.-phys. Cl. Sitzungsberichte.* Pp. 1030-1085.

Einstein, A. (1915). "Zur allgemeinen Relativitätstheorie". *K. Preußische Akademie der Wissenschaften, math.-phys. Cl. Sitzungsberichte.* Pp. 778–786.

Einstein, A. (1915a). "Zur allgemeinen Relativitätstheorie (Nachtrag)". *K. Preußische Akademie der Wissenschaften, math.-phys. Cl. Sitzungsberichte.* Pp. 799-801.

Einstein, A. (1915b). "Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie". *K. Preußische Akademie der Wissenschaften, math.-phys. Cl. Sitzungsberichte.* Pp. 831–839.

Einstein, A. (1915c). "Die Feldgleichungen der Gravitation". *K. Preußische Akademie der Wissenschaften, math.-phys. Cl. Sitzungsberichte.* Pp. 844-847.

Einstein, A. (1916). "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie". *Annalen der Physik.* (4) **49**: 769-822.

Einstein, A. (1916a). "Ernst Mach". *Physikalische Zeitschrift.* **17**: 101-104.

Einstein, A. (1917). "Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie". *K. Preußische Akademie der Wissenschaften, math.-phys. Cl. Sitzungsberichte.* Pp. 142-152.

Einstein, A. (1918). "Prinzipielles zur allgemeinen Relativitätstheorie". *Annalen der Physik.* **55**: 241-244.

Einstein, A. (1918a). "Über Gravitationswellen". *K. Preußische*

Akademie der Wissenschaften, math.-phys. Cl. Sitzungsberichte. Pp. 154-167.

Einstein, A. (1934). *Mein Weltbild.* Zweite Auflage. Amsterdam: Querido Verlag.

Einstein, A. (1949). "Autobiographisches". In P. A. Schilpp, ed. *Albert Einstein, Philosopher-Scientist*. Evanston: Open Court. Vol. I, Pp. 2-94.

Einstein, A. (1956). *The Meaning of Relativity (The Stafford Little Lectures of Princeton University, May 1921).* Fifth edition, including the Relativistic Theory of the Non-Symmetric Field. Princeton: Princeton University Press.

Einstein, A., H. Born y M. Born (1969). *Briefwechsel 1916-1955.* München: Nymphenburgerger Verlagshandlung.

Einstein, A. y M. Grossmann (1913). *Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation.* Leipzig: Teubner. (Publicado también, con observaciones adicionales, en *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, **62**: 225-261 (1914)).

Einstein, A. y L. Infeld (1949). "On the motion of particles in general relativity theory". *Canadian Journal of Mathematics.* **1**: 209.

Einstein, A. y A. Sommerfeld (1968). *Briefwechsel. Sechzig Briefe aus dem goldenen Zeitalter der modernen Physik.* Herausgegeben und kommentiert von A. Hermann. Basel: Schwabe & Co.

Ellis, G. F. R. y R. M. Williams (1988). *Flat and Curved Space-Times.* Oxford: Clarendon Press.

Eötvös, R. V. (1889). "Über die Anziehung der Erde auf verschiedene Substanzen". *Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn.* **8**: 65-68.

Eötvös, R., D. Pékar y E. Fekete (1922). "Beiträge zum Gesetze der Proportionalität von Trägheit und Gravitation". *Annalen der Physik.* **(4) 68**: 11-66.

Everett, H. (1957). "The Theory of the Universal Wave Function". En B. S. DeWitt y N. Graham, eds. *The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics*. Princeton: Princeton University Press, 1973. Pp. 3-140.

Fermi, E. (1922). "Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria". *R. Accademia dei Lincei. Rendiconti. Cla. Sci. Fis. Mat. Nat.* **31**: 184-187, 306-309.

Fock, V. A. (1957). "Three lectures on relativity theory". *Reviews* *of Modern Physics.* **29**: 325-333.

Fock, V. A. (1959). *The Theory of Space Time and Gravitation.* Traducido del ruso por N. Kemmer. London: Pergamon Press.

Fraassen, B. C. van (1972). "Earman on the Causal Theory of Time". *Synthese.* **24**: 87-95.

Friedman, M. (1973). "Relativity principles, absolute objects and symmetry groups". En P. Suppes. *Space, Time and Geometry.* Dordrecht: D. Reidel. Pp. 296-320.

Friedman, M. (1983). *Foundations of Space-Time Theories: Relativistic Physics and the Philosophy of Science.* Princeton: Princeton University Press.

Friedmann, A. (1922). "Über die Krümmung des Raumes". *Zeitschrift für Physik.* **10**: 377-386.

Friedmann, A. (1924). "Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes". *Zeitschrift für Physik.* **21**: 326-332.

Friedrichs, K. (1927). "Eine invariante Formulierung des Newtonschen Gravitationsgesetzes und des Grenzüberganges vom Einsteinschen zum Newtonschen Gesetz". *Mathematische Annalen.* **98**: 566-575.

Fuller, R. W. y J. A. Wheeler (1962). "Causality and multiply connected space-time". *Physical Review.* **128**: 919-929.

Galileo Galilei (EN). *Le Opere.* Nuova ristampa dell'Edizione Nazionale. Firenze: Barbera, 1964-66. 20 vols.

García Bacca, D. (1941). *Filosofía de las ciencias: Teoría de la Relatividad.* México: Editorial Séneca.

Geroch, R. P. (1966). "Singularities in closed universes". *Physical Review Letters.* **17**: 445-447.

Gödel, K. (1949). "An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation". *Reviews of Modern Physics.* **21**: 447-450.

Grünbaum, A. (1957). "The Philosophical Retention of Absolute Space in Einstein's General Theory of Relativity". *Philosophical Review.* **66**: 525-534.

Grünbaum, A. (1973). *Philosophical Problems of Space and Time.* Second enlarged edition. Dordrecht: D. Reidel.

Hall, A. R. y M. B. Hall, eds. (1978). *Unpublished Scientific Papers of Isaac Newton.* A Selection from the Portsmouth Collection in the University Library, Cambridge. Cambridge: Cambridge

University Press. (Primera edición, 1962).

Hanson, N. R. (1963). *The concept of the positron: A philosophical analysis.* Cambridge: Cambridge University Press.

Havas, P. (1964). "Four-dimensional formulations of Newtonian mechanics and their relation to the Special and the General Theory of Relativity". *Reviews of Modern Physics.* **236**: 938-965.

Hawking, S. W. (1965). "Occurrence of singularities in open universes". *Physical Review Letters.* **15**: 689-690.

Hawking, S. W. (1966). "The occurrence of singularities in cosmology". *Royal Society of London Proceedings.* **A 294**: 511-521.

Hawking, S. W. (1966a). "The occurrence of singularities in cosmology, II". *Royal Society of London Proceedings.* **A 295**: 490-493.

Hawking, S. W. (1966b). "Singularities in the universe". *Physical Review Letters.* **17**: 444-445.

Hawking, S. W. (1967). "The occurrence of singularities in cosmology, III: Causality and singularities". *Royal Society of London Proceedings.* **A 300**: 187-201.

Hawking, S. W. (1975). "Particle Creation by Black Holes". *Communications of Mathematical Physics.* **43**: 199-220.

Hawking, S. W. (1988). *A Brief History of Time: From the Big Bang to Black Holes.* New York: Bantam Books.

Hawking, S. W. y G. F. R. Ellis (1973). *The Large Scale Structure of Space-Time.* Cambridge: Cambridge University Press.

Hawking, S. W., A. King y P. McCarthy (1976). "A new topology for curved space-time which incorporates the causal, differential and conformal structure". *Journal of Mathematical Physics.* **17**: 174-181.

Hawking, S. W. y R. Penrose (1970). "The singularities of gravitational collapse and cosmology". *Royal Society of London Proceedings.* **A 314**: 529-548.

Healey, R. (1989). *The Philosophy of Quantum Mechanics: An Interactive Interpretation.* Cambridge: Cambridge University Press.

Heisenberg, W. (1925). "Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen". *Zeitschrift für Physik.* **33**: 879-893.

Heisenberg, W. (1927). "Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik". *Zeitschrift für Physik.* **43**: 172-198.

Heisenberg, W. (1930). *The Physical Principles of Quantum Mechanics.* Lectures delivered in Spring 1929 at the University of Chicago. Translated by C. Eckart y F. C. Hoyt. Chicago: University of Chicago Press.

Hempel, C. G. (1965). *Aspects of Scientific Explanation and Other Essays in the Philosophy of Science.* New York: Free Press.

Hempel, C. G. (1966). *Philosophy of Natural Science.* Englewood Cliffs: Prentice Hall.

Hiskes, A. L. D. (1984). "Space-time theories and symmetry groups". *Foundations of Physics.* **14**: 307-332.

Holton, G. (1973). *Thematic Origins of Scientific Thought: Kepler to Einstein.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Holton, G. (1978). *The Scientific Imagination.* London: Cambridge University Press.

Hönl, H. (1966). "Zur Geschichte des Machschen Prinzips". *Wissenschaftliche Zeitschrift der Universität Jena, Math.-Naturw. Reihe.* **15**: 25-36.

Howard D. y J. Stachel, eds. (1989). *Einstein and the History of General Relativity*. Boston: Birkhäuser.

Hubble, E. P. (1929). "A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae". *Proceedings of the National Academy of Sciences.* **15**: 168-173.

Hume, D. (THN). *A Treatise of Human Nature.* Edited by L. A. Selby-Bigge. Oxford: Clarendon Press, 1888.

Husserl, E. (1954). *Die Krisis der europäischen Wissenschaften und die transzendentale Phänomenologie: Eine Einleitung in die phänomenologische Philosophie.* Herausgegeben von W. Biemel. Haag: Nijhoff.

Jammer, M. (1961). *Concepts of Mass in Classical and Modern Physics.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Jammer, M. (1966). *The Conceptual Development of Quantum Mechanics.* New York: McGraw-Hill.

Jammer, M. (1974). *The Philosophy of Quantum Mechanics: The Interpretations of Quantum Mechanics in Historical Perspective.* New York: Wiley.

Kanitscheider, B. (1984). *Cosmologie: Geschichte und Systematik in philosophischer Perspektive.* Stuttgart: Reclam.

Kant, I. (1755). *Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels, oder Versuch von der Verfassung und dem mechanischen Ursprunge des* *ganzen Weltgebäudes nach Newtonischen Grundsätzen abgehandelt.* Königsberg/Leipzig: J. F. Petersen.

Kant, I. (1758). *Neuer Lehrbegriff der Bewegung und Ruhe.* Königsberg: J. F. Driest.

Kant, I. (1781). *Critik der reinen Vernunft.* Riga: J. F. Hartknoch.

Kirchhoff, G. (1860). "Über das Verhältnis zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Wärme und Licht". *Annalen der Physik.* **(2) 109**: 275-301.

Klein, F. (1872). *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.* Erlangen: A. Düchert.

Kretschmann, E. (1917). "Über den physikalischen Sinn der Relativitätspostulate". *Annalen der Physik.* **(4) 53**: 575-614.

Kuhn, T. S. (1962). *The Structure of Scientific Revolutions.* Chicago: University of Chicago Press.

Kuhn, T. S. (1964). "A function for thought experiments". En *L'Aventure de la Science: Mélanges Alexandre Koyré*. Paris: Hermann. Vol. II, Pp. 307-334. (Reproducido en Kuhn 1977, pp. 240-265).

Kuhn, T. S. (1977). *The Essential Tension: Selected Studies in Scientific Tradition and Change.* Chicago: University of Chicago Press.

Lange, L. (1885). "Über das Beharrungsgesetz". *K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig; math.-phys. Cl. Berichte.* **37**: 333-351.

Lange, L. (1886). *Die geschichtliche Entwicklung des Bewegungsbegriffes und ihr voraussichtliches Endergebnis: Ein Beitrag zur historischen Kritik der mechanischen Principien.* Leipzig: W. Engelmann.

Laue, M. von (1911). "Zur Dynamik der Relativitätstheorie". *Annalen der Physik.* **(4) 35**: 524-542.

Laue, M. von (1920). "Theoretisches über neuere optische Beobachtungen zur Relativitätstheorie". *Physikalische Zeitschrift.* **21**: 659-662.

Leibniz, G. W. (1717). *A Collection of Papers which passed between the late Learned Mr. Leibnitz and Dr. Clarke in the years 1715 and 1716 relating to the Principles of Natural Philosophy and Religion.* London: James Knapton.

Leibniz, G. W. (EF). *Escritos filosóficos.* Edición de E. de Olaso. Buenos Aires: Charcas.

Leibniz, G. W. (GP). *Die philosophischen Schriften.* Herausgegeben von C. J. Gerhardt. Hildesheim: Olms, 1965. 7 vols.

Lemaître, G. (1927). "Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant, rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques". *Annales de la Société des Sciences de Bruxelles.* **A 47**: 49-59.

Levi-Civitá, T. (1927). "L'écart géodesique". *Mathematische Annalen.* **97**: 291-320.

Lightman, A. y R. Brawer (1990). *Origins: The Lives and Worlds of Modern Cosmologists.* Cambridge, MA: Harvard University Press. (Entrevistas a 27 cosmólogos contemporáneos).

Lorenzen, P. (1978). "Die allgemeine Relativitätstheorie als eine Revision der Newtonsche Gravitationstheorie". *Philosophia Naturalis.* **17**: 1-9.

Lovelock, D. (1971). "The Einstein tensor and its generalizations". *Journal of Mathematical Physics.* **12**: 498-501.

Ludwig, G. (1981/85). *Foundations of Quantum Mechanics.* New York: Springer. 2 vols.

MacCallum, M. A. H. (1971). "Mixmaster Universe Problem". *Nature.* **230**: 112-113.

Mach, E. (*Mechanik*). *Die Mechanik historisch-kritisch dargestellt.* Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1963.

Maier, A. (1966). *Die Vorläufer Galileis im 14. Jahrhundert: Studien zur Naturphilosophie der Spätscholastik.* 2., erweiterte Auflage. Roma: Edizioni di "Storia e Letteratura".

Malament, D. (1977). "The class of continuous timelike curves determines the topology of spacetime". *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.* **18**: 1399-1404.

Malament, D. (1985). "Minimal acceleration requirements for 'time travel' in Gödel space-time". *Journal of Mathematical Physics.* **26**: 774-777.

Mehlberg, H. (1935/37). "Essai sur la théorie causale du temps". *Studia philosophica.* **1**: 119-260; **2**: 111-231.

Mehlberg, H. (1980). "Essay on the Causal Theory of Time". En Mehlberg, *Time, Causality and the Quantum Theory*. Edited by R. S. Cohen. Dordrecht: D. Reidel. Vol. I. (Traducción inglesa de Mehlberg 1936/37, por el propio autor).

Mehra, J. y H. Rechenberg (1982). *The Historical Development of Quantum Theory.* New York: Springer. (Cuatro volúmenes en cinco tomos).

Merleau-Ponty, J. (1965). *Cosmologies du XXe Siècle.* Paris: Gallimard.

Michelson, A. A. y E. W. Morley (1887). "On the relative motion of the earth and the luminiferous ether". *Philosophical Magazine.* (5) **24**: 449-463.

Milne, E. A. (1948). *Kinematic Relativity.* Oxford: Clarendon Press.

Milne, E. A. (1952). *Modern Cosmology and the Christian Idea of God.* Oxford: Clarendon Press.

Minkowski, H. (1907). "Das Relativitätsprinzip". *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.* **24**: 372-382 (1915). (Texto de una conferencia de 1907, publicado póstumamente).

Minkowski, H. (1908). "Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körper". *Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, math.-phys. Cl.* Pp. 53-111.

Minkowski, H. (1909). "Raum und Zeit". *Physikalische Zeitschrift.* **10**: 104-111.

Misner, C. (1968). "Relativistic fluids in cosmology". En C. M. DeWitt y J. A. Wheeler, eds. *Battelle Rencontres: 1967 Lectures in Mathematics and Physics*. New York: Benjamin. Pp. 117-120.

Misner, C. (1968a). "The isotropy of the universe". *Astrophysical Journal.* **151**: 431-457.

Misner, C. W., K. S. Thorne y J. A. Wheeler (1973). *Gravitation.* San Francisco: W. H. Freeman.

Moulines, C. U. (1991). *Pluralidad y recursión: Estudios epistemológicos.* Madrid: Alianza.

Müller-Markus, S. (1963). "Die Prinzipien der allgemeinen Relativitätstheorie: Zu den Thesen von V. A. Fock". *Synthese.* **15**: 336.

Neumann, C. (1870). *Über die Principien der Galilei-Newton'schen Theorie.* Leipzig: Teubner.

Newton, I. (*Principia*). *Philosophiæ naturalis principia mathematica.* The Third Edition (1726) with variant readings. Assembled and edited by A. Koyré and I. B. Cohen. Cambridge MA: Harvard University Press, 1972. 2 vols.

Norton, J. (1984). "How Einstein found his field equations: 1912-1915". *Historical Studies in the Physical Sciences.* **14**: 253-316. (Reproducido en Howard y Stachel 1989, pp. 101-159).

Norton, J. (1989). "What was Einstein's Principle of Equivalence". En Howard y Stachel 1989, pp. 1-47.

O'Raifertaigh, L. (1958). "Fermi coordinates". *Royal Irish Academy Proceedings.* **59 A**: 15-24.

Ozsváth, I. y E. Schücking (1969). "The finite rotating universe". *Annals of Physics.* **55**: 166-204.

Pais, A. (1982). *'Subtle is the Lord...': The Science and the Life of Albert Einstein.* Oxford: Clarendon Press.

Papapetrou, A. (1974). *Lectures on General Relativity.* Dordrecht: D. Reidel.

Peebles, P. J. E. (1993). *Principles of Physical Cosmology.* Princeton: Princeton University Press.

Penrose, R. (1965). "Gravitational collapse and space-time singularities". *Physical Review Letters.* **14**: 57-59.

Penrose, R. (1989). *The Emperor's New Mind: Concerning computers, minds and the laws of physics.* Oxford: Oxford University Press.

Penzias, A. A. y R. W. Wilson (1965). "A measurement of excess antenna temperature at 4080 Mc/s". *Astrophysical Journal.* **142**: 419-421.

Petrov, A. Z. (1969). *Einstein Spaces.* Oxford: Pergamon Press.

Pieri, M. (1899). "Della geometria elementare come sistema ipotetico-deduttivo; monografia del punto e del moto". *Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino, Classe di Sc. Fisiche, Matematiche e Naturali, Serie 2.* **48**: 1–62.

Planck, M. (1900). "Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normal-spektrum". *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft.* **2**: 237-245.

Planck, M. (1907). "Zur Dynamik bewegter Systeme". *K. Preußische Akademie der Wissenschaften. Sitzungsberichte.* Pp. 542-570.

Poincaré, H. (1906). "Sur la dynamique de l'électron". *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.* **21**: 121-175.

Poincaré, H. (SH). *La science et l'hypothèse.* Paris. Flammarion: 1968. (La primera edición fue publicada por Flammarion en 1902).

Pound, R. V. y G. A. Rebka (1959). "Gravitational redshift in nuclear resonance". *Physical Review Letters.* **3**: 439-441.

Pound, R. V. y G. A. Rebka (1960). "Apparent weight of photons". *Physical Review Letters.* **4**: 337-341.

Pound, R. V. y J. L. Snider (1965). "Effect of gravity on gamma radiation". *Physical Review.* **140B**: 788-803.

Putnam, H. (1982). "Why there isn't a ready-made world?". *Synthese.* **51**: 141-167.

Raychaudhuri, A. K. (1955). “Relativistic cosmology, I”. *Physical Review.* **98**: 1123-1126.

Reichenbach, H. (1928). *Philosophie der Raum-Zeit-Lehre.* Berlin: W. de Gruyter.

Reichenbach, H. (1938). *Experience and Prediction: An Analysis of the Foundations and the Structure of Knowledge.* Chicago: University of Chicago Press.

Reichenbach, H. (1958). *The Philosophy of Space and Time.* Translated by M. Reichenbach and J. Freund. New York: Dover. (Traducción inglesa de Reichenbach 1928).

Ricci, G. y T. Levi-Cività (1901). “Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications”. *Mathematische Annalen.* **54**: 125-201.

Riemann, B. (1854). “Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen”. *Göttinger Abhandlungen.* **13**: 133-152. (Hay versión castellana: B. Riemann, “Sobre las hipótesis que están en la base de la geometría”, traducido del alemán por R. Torretti; *Diálogos,* **31**: 151-178 (1968)).

Rindler, W. (1956). “Visual Horizons in World Models”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.* **116**: 662-677.

Rindler, W. (1977). *Essential Relativity, Special, General and Cosmological.* Second edition. Berlin: Springer.

Robb, A. A. (1914). *A Theory of Time and Space.* Cambridge: Cambridge University Press.

Roll, P. G., R. Krotkov y R. H. Dicke (1964). “The equivalence of inertial and passive gravitational mass”. *Annals of physics.* **26**: 442-517.

Ryan M. P. y R. C. Shepley (1975). *Homogeneous Relativistic Cosmologies.* Princeton: Princeton University Press.

Salmon, W. C. (1977). “The philosophical significance of the one-way velocity of light”. *Noûs.* **11**: 253-292.

Sandage, A. (1968). “Observational cosmology”. *Observatory.* **88**: 91-106.

Schmidt, B. G. (1971). “A new definition of singular points in General Relativity”. *General Relativity and Gravitation.* **1**: 269-280.

Schmidt, H. (1966). “Model of an oscillating cosmos that rejuvenates during contraction”. *Journal of Mathematical Physics.* **7**: 494-

509.

Schouten, J. A. y E. R. van Kampen (1930). "Zur Einbettungs- und Krümmungs-theorie nichtholonomer Gebilde". *Mathematische Annalen.* **103**: 752-783.

Schrödinger, E. (1926). "Quantisierung als Eigenwertproblem: Erste Mitteilung". *Annalen der Physik.* (4) **79**: 361-376.

Schrödinger, E. (1926a). "Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen". *Annalen der Physik.* (4) **79**: 734-756.

Schrödinger, E. (1935). "Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik". *Die Naturwissenschaften.* **23**: 807-812, 823-828, 844-849.

Schrödinger, E. (1952). "Are there quantum jumps?". *British Journal for the Philosophy of Science.* **3**: 109-123.

Schur, F. (1886). "Über den Zusammenhang der Räume konstanter Krümmungsmasses mit den projektiven Räumen". *Mathematische Annalen.* **27**: 537-567.

Schwarzschild, K. (1916). "Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie". *K. Preußische Akademie der Wissenschaften, math.-phys. Classe. Sitzungsberichte.* Pp. 189-196.

Seelig, C. (1957). *Albert Einstein: A documentary biography.* Traducido por M. Savill. London: Staples Press. (Traducción de Seelig, *Albert Einstein: eine dokumentarische Biographie,* Zürich: Europa Verlag, 1954).

Shankland, R. S. (1963). "Conversations with Albert Einstein". *American Journal of Physics.* **31**: 47-57.

Shankland, R. S. (1973). "Conversations with Albert Einstein. II". *American Journal of Physics.* **41**: 895-901.

Shimony, A. (1991). "Desiderata for a modified quantum dynamics". En A. Fine et al., eds., *PSA 1990: Proceedings of the 1990 Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association.* East Lansing: Philosophy of Science Association. Vol. II, pp. 49-59.

Sitter, W. de (1917). "On the relativity of inertia. Remarks concerning Einstein's latest hypothesis". *K. Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Proceedings.* **19**: 1217-1225.

Sitter, W. de (1917a). "On the curvature of space". *K. Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Proceedings.* **20**: 229-243.

Sitter, W. de (1917b). "On Einstein's theory of gravitation, and its astronomical consequences". *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.* **78**: 3-28.

Sitter, W. de (1933). "On the expanding universe and the time-scale". *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.* **93**: 628-634.

Slipher, V. M. (1913). "The radial velocity of the Andromeda Nebula". *Lowell Observatory Bulletin.* Nº 58.

Slipher, V. M. (1915). "Spectrographic observations of nebulae". *Popular Astronomy.* **23**: 21-24.

Slipher, V. M. (1917). "A spectrographic investigation of spiral nebulae". *American Philosophical Society Proceedings.* **56**: 403-409.

Stachel, J. (1989). "Einstein's Search for General Covariance, 1912-1915". En Howard y Stachel 1989, pp. 63-100.

Stachel, J. (1992). "The meaning of general covariance: the hole story". Manuscrito inédito.

Stein, H. (1967). "Newtonian space-time". *Texas Quarterly.* **10**: 174-200.

Stein, H. (1977). "Some philosophical prehistory of General Relativity". En J. Earman et al., eds. *Foundations of Space-Time Theories*. Minneapolis: University of Minnesota Press, pp. 3-49.

Strauss, M. (1968). "Einstein's theories and the critics of Newton: An essay in logico-historical analysis". *Synthese.* **18**: 251-284.

Suppes, P., ed. (1973). *Space, Time and Geometry.* Dordrecht: D. Reidel.

Synge, J. L. (1955). *Relativity: The Special Theory.* Amsterdam: North-Holland.

Synge, J. L. (1960). *Relativity: The General Theory.* Amsterdam: North-Holland.

Taub, A. H. (1951). "Empty space-times admitting a three-parameter group of motions". *Annals of Mathematics.* **53**: 472-490.

Teller, E. (1948). "On the change of physical constants". *Physical Review.* **73**: 801.

Thirring, H. y J. Lense (1918). "Über dem Einfluß der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie". *Physikalische Zeitschrift.* **19**: 156-173.

Thomson, J. (1884). "On the Law of Inertia, the Principle of Chronometry and the Principle of Absolute Clinural Rest, and of Absolute Rotation". *Royal Society of Edinburgh Proceedings.* **12**: 568–578.

Torretti, R. (1983). *Relativity and Geometry.* Oxford: Pergamon Press.

Torretti, R. (1984). "Space-time physics and the philosophy of science". *British Journal for the Philosophy of Science.* **35**: 280-292. (Reseña de M. Friedman 1983).

Torretti, R. (1990). *Creative Understanding: Philosophical Reflections on Physics.* Chicago: University of Chicago Press.

Trautmann, A. (1966). "Comparison of Newtonian and relativistic theories of space-time". En B. Hoffmann, ed. *Perspectives in Geometry and Relativity: Essays in Honor of Vlácav Hlavaty*. Bloomington: Indiana University Press. Pp. 413-425.

Veblen, O. y J. H. C. Whitehead (1932). *The Foundations of Differential Geometry.* Cambridge: Cambridge University Press.

Wald, R. M. (1984). *General Relativity.* Chicago: University of Chicago Press.

Weinberg, S. (1972). *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity.* New York: Wiley.

Weinberg, S. (1977). *The First Three Minutes: A Modern View of the Origin of the Universe.* New York: Basic Books.

Weinberg, S. (1993). *Dreams of a Final Theory.* New York: Pantheon.

Weyl, H. (1918). *Raum-Zeit-Materie: Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie.* Berlin: Springer.

Weyl, H. (1921). "Zur Infinitesimalgeometrie: Einordnung der projektiven und konformen Auffassung". *Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-phys. Klasse.* Pp. 99-112.

Weyl, H. (1923). *Raum-Zeit-Materie: Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie.* Fünfte, umgearbeitete Auflage. Berlin: Springer.

Weyl, H. (1924). "Massenträgheit und Kosmos". En Weyl. *Was ist Materie? Zwei Aufsätze zur Naturphilosophie*. Berlin: Springer. Pp. 60-76.

Wheeler, J. A. (1962). *Geometrodynamics.* New York: Academic Press.

Wheeler, J. A. (1964). "Mach's Principle as boundary condition for Einstein equations". En Chiu y Hoffman 1964, pp. 303-349.

Whitehead, A. N. (1920). *The Concept of Nature.* Cambridge: Cambridge University Press.

Whitehead, A. N. (1922). *The Principle of Relativity.* Cambridge: Cambridge University Press.

Whitrow, G. J. (1955). "Why physical space has three dimensions". *British Journal for the Philosophy of Science.* **6**: 13-31.

Whittaker, E. T. (1928). "Note on the law that light-rays are the null-geodesics of a gravitational field". *Cambridge Philosophical Society Proceedings.* **24**: 32-34.

Wigner, E. (1979). *Symmetries and Reflections.* Woodbridge: Ox Bow Press.

Wilson, R. M. (1990). "The discovery of the cosmic microwave background". En B. Bertotti et al., eds. *Modern Cosmology in Retrospect*. Cambridge: Cambridge University Press. Pp. 291-307.

Woodward, J. F. y W. Yourgrau (1972). "The incompatibility of Mach's Principle and the Principle of Equivalence in current gravitation theory". *British Journal for the Philosophy of Science.* **23**: 111-116.

Zeeman, E. C. (1964). "Causality Implies the Lorentz Group". *Journal of Mathematical Physics.* **5**: 490-493.

Información sobre las publicaciones originales

Como se explica en el prólogo, los nueve capítulos de este libro son versiones mejoradas —y en varios casos libremente traducidas— por el autor de trabajos suyos que ya se habían publicado en diversos lugares. Damos aquí las fichas bibliográficas de las versiones originales.

[1] "Presencia e idea del mundo". *Cuadernos de la Facultad de Humanidades*, **1**: 3–21 (1978).

[2] "Kosmologie als ein Zweig der Physik". En B. Kanitscheider, ed., *Moderne Naturphilosophie,* Würzburg: Königshausen & Neumann, 1984, pp. 183–200.

[3] "Einstein's happiest thought". Ponencia leída en el Symposium on Scientific Creativity reunido en la Universidad de Carolina del Norte en Greensboro en marzo de 1989. Inédito. Este trabajo apareció en versión castellana del autor —prácticamente igual a la ofrecida aquí— bajo el título "Una idea feliz" en *Revista Latinoamericana de Filosofía*, **19**: 289-301 (1993).

[4] "Indole y función de los principios de la Teoría General de la Relatividad". *Revista Latinoamericana de Filosofia,* **5**: 209–233 (1979).

[5] "Causality and spacetime structure in Relativity". En R. S. Cohen and L. Laudan, eds., *Physics, Philosophy and Psychoanalysis: Essays in Honor of Adolf Grünbaum,* Dordrecht: D. Reidel Publishing Co., 1983, pp. 273–293.

[6] "Mathematical theories and philosophical insights in cosmology". En H. Nelkowski et al., eds., *Einstein Symposion Berlin,* Berlin: Springer, 1979, pp. 320–335 (*Springer Lecture Notes in Physics,* **100**).

[7] "The geometric structure of the universe". En Evandro Agazzi y Alberto Cordero, eds., *Philosophy and the Origin and Evolution of the Universe*. Dordrecht: Kluwer, 1991, pp. 53–73.

[8] "Conceptual reform in scientific revolutions". En Ruth Barcan Marcus *et al.*, eds., *Logic, Methodology and Philosophy of Science VIII,* Amsterdam: North-Holland, 1986, pp. 413–431. Este trabajo apareció en versión castellana del autor —algo diferente de la ofrecida aquí— en *Revista Latinoamericana de Filosofía*, **10**: 25–41 (1984), bajo el título "La crítica de conceptos en las revoluciones de la física básica".

[9] "El 'observador' en la física del siglo XX". En Francisco José Ramos, ed., *Hacer: Pensar. Colección de escritos filosóficos,* Río Piedras: Editorial de la Universidad de Puerto Rico, 1994, pp. 559-588.

Índice analítico

Índice de símbolos

Breve descripción del significado de algunos símbolos matemáticos empleados en el libro. Los números a la derecha indican la páginas donde están definidos.

Lista de ilustraciones